TOME 12. N° 2. FÉVRIER 1951.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

POLARISATION DE LA LUMIÈRE DIFFUSÉE PAR DES PARTICULES SPHÉRIQUES

Par FRANCIS PERRIN et A. ABRAGAM
Collège de France, Paris.

Sommaire. — Les dix coefficients qui déterminent l'intensité et l'état de polarisation de la lumière diffusée dans une direction donnée par un milieu isotrope trouble non symétrique (pouvoir rotatoire possible) doivent être liés par cinq relations quand la diffusion est produite par une suspension de sphérules identiques; mais une seule de ces relations subsiste si les sphérules sont variées.

En l'absence de pouvoir rotatoire, il n'y a que quatre coefficients de diffusion distincts pour une suspension de sphérules quelconques, ces quatre coefficients devant être liés par une relation si les sphérules sont identiques (ou toutes très petites par rapport à la longueur d'onde).

Les quatre coefficients de diffusion prévus sont calculés pour une sphère transparente à partir des formules de Mie et Debye (d'où l'on déduit, en général, seulement les deux coefficients relatifs à une lumière incidente polarisée linéairement dans le plan de diffusion ou perpendiculairement). Les possibilités de détermination des dimensions de particules en suspension par l'étude complète de la polarisation de la lumière diffusée, pour une lumière incidente de polarisation quelconque, sont discutées.

L'emploi des paramètres de Stokes, pour caractériser l'état de polarisation des faisceaux de lumière, permet aisément de définir tous les coefficients qui déterminent la diffusion d'une lumière de polarisation quelconque par un milieu isotrope, notamment par une supension de particules ayant des dimensions non négligeables par rapport à la longueur d'onde [1]. On sait, d'autre part, que la théorie de la diffusion de la lumière par une sphère homogène de rayon quelconque a été faite complètement par G. Mie en 1908 (du moins pour des milieux dénués de pouvoir rotatoire). Il est intéressant de calculer à partir de cette analyse détaillée tous les coefficients prévus par la théorie formelle générale, notamment afin de se rendre compte du domaine d'application de certains critériums proposés pour distinguer une diffusion multipolaire de la diffusion dipolaire due à de très petites particules, ou pour juger de l'homogénéité d'une suspension de particules sphériques.

Rappelons la définition des paramètres de Stokes : En un point d'un pinceau de lumière « monochromatique », les composantes du champ électrique, suivant deux axes rectangulaires Ox, Oy du plan d'onde, peuvent être considérées comme les parties réelles des expressions complexes

$$X = p_1\, e^{j(\omega t+\varphi_1)}, \qquad Y = p_2\, e^{j(\omega t+\varphi_2)}; \tag{1}$$

les amplitudes p et les phases φ subissant des variations aléatoires lentes, ou rares, par rapport à la période, mais rapides vis-à-vis des durées d'observation. Les résultats de toutes les mesures qui peuvent être faites (au moyen d'analyseurs de polarisation) sur le pinceau considéré sont déterminés par les quatre valeurs moyennes, prises sur un intervalle de temps suffisamment long,

$$\left.\begin{aligned} I &= \overline{XX^*}+\overline{YY^*} = \overline{p_1^2}+\overline{p_2^2},\\ M &= \overline{XX^*}-\overline{YY^*} = \overline{p_1^2}-\overline{p_2^2},\\ C &= \overline{XY^*}+\overline{YX^*} = 2\,\overline{p_1p_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)},\\ S &= -i(\overline{XY^*}-\overline{YX^*}) = 2\,\overline{p_1p_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

l'astérisque indiquant le passage à la quantité complexe conjuguée. Ces grandeurs, appelées paramètres de Stokes, caractérisent complètement l'intensité et l'état de polarisation du pinceau au point considéré; elles satisfont à la condition

$$I \geqq \sqrt{M^2+C^2+S^2}, \tag{3}$$

l'égalité n'ayant lieu que si la polarisation est totale.

L'importance de ces paramètres tient à ce qu'ils se combinent par simple addition quand deux pinceaux parallèles indépendants sont superposés. Cette propriété de linéarité impose notamment que les paramètres I', M', C', S' relatifs à la lumière diffusée dans une direction déterminée, par un milieu isotrope quelconque, soient des fonctions linéaires des paramètres I, M, C, S qui caractérisent la lumière incidente; et l'application du principe de réciprocité [2] permet de prouver que ces fonctions linéaires doivent être de la forme (F. P., I, p. 48) :

$$\left.\begin{aligned} I' &= a_1 I + b_1 M - b_3 C + b_5 S, \\ M' &= b_1 I + a_2 M - b_4 C + b_6 S, \\ C' &= b_3 I + b_4 M + a_3 C + b_2 S, \\ S' &= b_5 I + b_6 M - b_2 C + a_4 S, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

les axes de référence étant ceux indiqués (axes des x et des x' dans le plan de diffusion, axe des y' parallèle à l'axe des y, axe des z suivant la direction de propagation de la lumière incidente et axe des z' suivant celle de la lumière étudiée). Les coefficients de diffusion a et b sont des fonctions de l'angle de diffusion Φ que nous définirons comme étant l'angle entre les directions de propagation de la lumière incidente et de la lumière diffusée (angle de Oz' avec Oz).

Lorsque le milieu isotrope diffusant est symétrique par rapport à un centre (absence de pouvoir rotatoire) les quatre coefficients b_3, b_4, b_5, b_6 doivent être nuls. Et si la diffusion est produite par des particules très petites par rapport à la longueur d'onde (diffusion dipolaire), on doit de plus avoir (F. P., I, p. 50) :

$$b_2 = 0 \quad (5)$$

et

$$a_2^2 - a_3^2 - b_1^2 = 0. \quad (6)$$

Diffusion par des sphères. — Si la diffusion est produite par une émulsion de particules sphériques identiques, la polarisation sera la même pour toutes les ondes diffusées partielles dues aux diverses particules distribuées au hasard dans le milieu. Cette polarisation étant complète si la lumière incidente est elle-même complètement polarisée, on voit qu'alors la lumière diffusée au total doit être aussi complètement polarisée (à condition que l'émulsion soit suffisamment diluée pour que la diffusion multiple soit négligeable). Par suite, dans ce cas, la relation

$$I^2 - M^2 - C^2 - S^2 = 0$$

doit entraîner la relation

$$I'^2 - M'^2 - C'^2 - S'^2 = 0,$$

et il résulte de cette condition que les dix coefficients a et b doivent satisfaire à cinq relations indépendantes (F. P., II, p. 426) qui peuvent être mises sous la forme

$$\left.\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 &= 0, \\ b_1(a_1 - a_2) &= b_3 b_4 + b_5 b_6, \\ a_1^2 - a_2^2 &= b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_6^2, \\ a_1^2 - a_3^2 &= b_1^2 + b_2^2 + b_4^2 + b_5^2, \\ b_2(b_3 b_4 + b_5 b_6) + b_1(b_4 b_6 - b_3 b_5) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Dans le cas d'une émulsion contenant des particules sphériques différant par leurs grandeurs, ou leurs propriétés optiques, chacun des coefficients de diffusion a ou b sera la somme pondérée des coefficients correspondants relatifs à chaque type de particules sphériques du mélange. La seule relation entre les coefficients de diffusion qui subsistera après ce processus d'addition sera la relation linéaire

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0, \quad (8)$$

qui est ainsi caractéristique de la diffusion par une émulsion d'un mélange quelconque de particules sphériques (sans plans ni centre de symétrie).

Pour des particules sphériques identiques ayant un centre de symétrie (et plongées dans un milieu sans pouvoir rotatoire) les coefficients b_3, b_4, b_5, b_6 devant être nuls, les relations (7) se réduisent à

$$a_1 = a_2, \qquad a_3 = a_4; \quad (9)$$

$$a_1^2 - (a_3^2 + b_1^2 + b_2^2) = 0. \quad (10)$$

Les relations entre les paramètres de Stokes de la lumière diffusée et de la lumière incidente ont ainsi, pour une émulsion de sphères identiques et symétriques, la forme simple

$$\left.\begin{aligned} I' &= a_1 I + b_1 M, \\ M' &= b_1 I + a_1 M, \\ C' &= a_3 C + b_2 S, \\ S' &= -b_2 C + a_3 S, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

et cette forme reste valable pour une émulsion d'un mélange quelconque de particules sphériques symétriques diverses, car les relations (9) étant linéaires subsistent pour un tel mélange. Mais pour une émulsion hétérogène, le premier membre de l'équation (10) sera toujours positif (car a_1^2 est le carré de la somme des longueurs a_{1i} de vecteurs de composantes a_{3i}, b_{1i}, b_{2i} et $a_3^2 + b_1^2 + b_2^2$ est le carré de la longueur de la résultante de ces vecteurs). La grandeur

$$d^2 = \frac{a_1^2 - (a_3^2 + b_1^2 + b_2^2)}{a_1^2} \quad (12)$$

peut donc servir à caractériser l'inhomogénéité de composition d'une suspension de particules sphériques symétriques; mais il faut noter que cette quantité ne peut être différente de zéro que pour une suspension de sphères qui ne soient pas toutes très petites par rapport à la longueur d'onde, car pour des sphères mêmes variées, mais toutes très

petites, les relations (5), (6) et (9) alors valables prouvent que d^2 est toujours nul.

On peut retrouver tous ces résultats relatifs à la diffusion par des sphères, en considérant les amplitudes complexes X' et Y' du champ électrique de l'onde diffusée. Pour un petit élément diffusant bien déterminé mais quelconque, ces amplitudes doivent être des fonctions linéaires des amplitudes complexes X et Y du champ électrique de l'onde incidente

$$\left.\begin{aligned} X' &= A_1 X + B_1 Y, \\ Y' &= B_2 X + A_2 Y, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

A_1, A_2, B_1, B_2, étant des nombres complexes déterminés et fonctions régulières de la direction d'observation [1]. Si les directions d'éclairement et d'observation sont équivalentes par rapport à l'élément diffusant, ce qui sera, quelle que soit la direction d'observation, si l'élément diffusant est isotope (symétrie sphérique éventuellement sans plans ni centre de symétrie), le principe de réciprocité peut être appliqué et exige que

$$B_1 = -B_2$$

(le changement de signe tient à l'inversion des trièdres de référence quand on inverse le sens de propagation de la lumière). On a donc pour une sphère diffusante

$$\left.\begin{aligned} X' &= A_1 X - BY, \\ Y' &= BX + A_2 Y. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

En calculant, à partir de ces expressions des amplitudes, les paramètres de Sotkes I', M', C', S' du faisceau diffusé on trouve qu'ils s'expriment linéairement en fonction des paramètres I, M, C, S du faisceau incident par des relations ayant la forme des relations (1), les coefficients étant

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(A_1A_1^* + A_2A_2^*) + BB^*, \\ a_2 &= \frac{1}{2}(A_1A_1^* + A_2A_2^*) - BB^*, \\ b_1 &= \frac{1}{2}(A_1A_1^* - A_2A_2^*), \\ a_3 &= \frac{1}{2}(A_1A_2^* + A_2A_1^*) - BB^*, \\ a_4 &= \frac{1}{2}(A_1A_2^* + A_2A_1^*) + BB^*, \\ b_2 &= \frac{i}{2}(A_1A_2^* - A_2A_1^*), \\ b_3 &= \frac{1}{2}[(A_1 - A_2)B^* + (A_1^* - A_2^*)B], \\ b_4 &= \frac{1}{2}[(A_1 + A_2)B^* + (A_1^* + A_2^*)B], \\ b_5 &= -\frac{i}{2}[(A_1 + A_2)B^* - (A_1^* + A_2^*)B], \\ b_6 &= -\frac{i}{2}[(A_1 - A_2)B^* - (A_1^* - A_2^*)B], \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

expressions à partir desquelles on vérifie facilement les relations (7).

En l'absence de pouvoir rotatoire (sphère diffusante ayant centre et plans de symétrie) le plan de diffusion est un plan de symétrie; les formules qui donnent X' et Y' en fonction de X et Y doivent donc être invariantes quand on change Y en $-Y$ et Y' en $-Y'$, ce qui exige que B soit nul et que par suite on ait

$$\left.\begin{aligned} X' &= A_1 X, \\ Y' &= A_2 Y, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

et

$$\left.\begin{aligned} a_1 = a_2 &= \frac{1}{2}(A_1A_1^* + A_2A_2^*), \\ b_1 &= \frac{1}{2}(A_1A_1^* - A_2A_2^*), \\ a_3 = a_4 &= \frac{1}{2}(A_1A_2^* + A_2A_1^*), \\ b_2 &= \frac{i}{2}(A_1A_2^* - A_2A_1^*), \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

avec

$$a_1^2 = a_3^2 + b_1^2 + b_2^2,$$

les coefficients b_3, b_4, b_5, b_6 étant nuls.

Valeurs des coefficients de diffusion pour une sphère homogène sans pouvoir rotatoire. — G. Mie [3], puis P. Debye [4], ont calculé, à partir des équations de Maxwell la diffusion de la lumière par une sphère homogène faite d'une substance isotrope symétrique, ayant un indice de réfraction complexe (réfraction et absorption quelconques, mais pas de pouvoir rotatoire). Leurs formules sont d'application assez laborieuse, et divers auteurs ont repris depuis la question [5].

Ces théories donnent les valeurs des coefficients complexes A_1 et A_2 des relations (16). Soient a le rayon de la sphère, n_i son indice de réfraction complexe, n_e l'indice du milieu non absorbant dan lequel elle est plongée, et

$$\nu = \frac{n_i}{n_e}$$

l'indice relatif; λ étant la longueur d'onde dans le vide de la lumière utilisée, nous poserons

$$k_e = n_e \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \rho = k_e a = n_e \frac{2\pi a}{\lambda}.$$

Avec ces notations, et la définition de l'angle de diffusion Φ indiquée plus haut, on déduit des formules obtenues par Mie et Debye que l'on a, r étant la

[1] Pour l'ensemble d'un milieu étendu ayant une structure fine irrégulière, ces coefficients doivent varier très rapidement en fonction de cette direction, et, seules, des moyennes ont une signification; si, de plus, le milieu subit des fluctuations de structure dues à l'agitation thermique, les coefficients A et B seront, même pour une direction déterminée, des fonctions aléatoires du temps.

distance du centre de la sphère diffusante au point d'observation,

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{e^{-ik_e r}}{k_e r}(P_1 + iQ_1), \\ A_2 &= \frac{e^{-ik_e r}}{k_e r}(P_2 + iQ_2), \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

avec, $P_n(\cos\Phi)$ désignant le $n^{\text{ième}}$ polynome de Legendre,

$$\left.\begin{aligned} P_1 + iQ_1 &= i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)} \times \left[\alpha_{n1}\frac{d^2}{d\Phi^2}P_n(\cos\Phi) + \alpha_{n2}\frac{1}{\sin\Phi}\frac{d}{d\Phi}P_n(\cos\Phi)\right], \\ P_2 + iQ_2 &= i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)} \times \left[\alpha_{n2}\frac{d^2}{d\Phi^2}P_n(\cos\Phi) + \alpha_{n1}\frac{1}{\sin\Phi}\frac{d}{d\Phi}P_n(\cos\Phi)\right], \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

les coefficients α ayant pour valeurs

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n1} &= \frac{\psi_n(\rho)\psi'_n(\nu\rho) - \nu\psi'_n(\rho)\psi_n(\nu\rho)}{\zeta_n(\rho)\psi'_n(\nu\rho) - \nu\zeta'_n(\rho)\psi_n(\nu\rho)}, \\ \alpha_{n2} &= \frac{\nu\psi_n(\rho)\psi'_n(\nu\rho) - \psi'_n(\rho)\psi_n(\nu\rho)}{\nu\zeta_n(\rho)\psi'_n(\nu\rho) - \zeta'_n(\rho)\psi_n(\nu\rho)}, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

expressions dans lesquelles les fonctions ψ et ζ sont définies par

$$\left.\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(x), \\ \chi_n(x) &= (-1)^n\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{-n-\frac{1}{2}}(x); \\ \zeta_n(x) &= \psi_n(x) + i\chi_n(x), \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$J_l(x)$ étant la fonction de Bessel d'ordre l.

Connaissant les coefficients A_1 et A_2 on obtient les coefficients de diffusion par les formules (17) qui donnent

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_1 &= \frac{1}{(k_e r)^2}(P_1^2 + Q_1^2), \\ a_1 - b_1 &= \frac{1}{(k_e r)^2}(P_2^2 + Q_2^2), \\ a_3 &= \frac{1}{(k_e r)^2}(P_1P_2 + Q_1Q_2), \\ b_2 &= \frac{1}{(k_e r)^2}(P_1Q_2 - P_2Q_1). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

On peut déduire des formules (19) et (20) des développements par rapport aux puissances de ρ qui convergent rapidement quand ρ est inférieur à 1. Nous nous bornerons à donner les premiers termes de ces développements pour une sphère non absorbante, c'est-à-dire pour laquelle l'indice n_1 et par suite l'indice relatif ν est réel. En posant

$$R = \frac{\nu^2-1}{\nu^2+1}\rho^3\left(1 + \frac{3}{5}\frac{\nu^2-2}{\nu^2+2}\rho^2\right), \quad (23)$$

on trouve alors, en ne conservant dans chaque développement que le premier terme non nul après le terme en ρ^3,

$$\left.\begin{aligned} P_1 &\simeq R\left[\cos\Phi + \frac{1}{15}\frac{\nu^2+2}{2\nu^2+3}(\nu^2 - 1 + 5\cos^2\Phi)\rho^2\right], \\ Q_1 &\simeq -\frac{2}{3}R^2\cos\Phi, \\ P_2 &\simeq R\left[1 + \frac{1}{15}\frac{\nu^2+2}{2\nu^2+3}(\nu^2+4)\cos\Phi\,\rho^2\right], \\ Q_2 &\simeq -\frac{2}{3}R^2. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

On en déduit, en ne conservant également les termes que jusqu'aux premiers qui marquent l'écart par rapport à la diffusion par une sphère infiniment petite

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_1 &\simeq \frac{R^2}{(k_e r)^2}\left[\cos\Phi + \frac{1}{15}\frac{\nu^2+2}{2\nu^2+3} \times (\nu^2 - 1 + 5\cos^2\Phi)\rho^2\right]^2, \\ a_1 - b_1 &\simeq \frac{R^2}{(k_e r)^2}\left[1 + \frac{1}{15}\frac{\nu^2+2}{2\nu^2+3}(\nu^2+4)\cos\Phi\,\rho^2\right]^2, \\ a_3 &\simeq \frac{R^2}{(k_e r)^2}\left\{\cos\Phi + \frac{1}{15}\frac{\nu^2+2}{2\nu^2+3} \times [\nu^2 - 1 + (\nu^2+9)\cos^2\Phi]\rho^2\right\}, \\ b_2 &\simeq -\frac{R^2}{(k_e r)^2}\frac{2}{45}\frac{(\nu^2-1)^2}{2\nu^2+3}\sin^2\Phi\,\rho^5. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Les vérifications expérimentales de la théorie de la diffusion de la lumière par une sphère, ou l'utilisation de cette théorie pour déterminer la grandeur de particules sphériques ou de grosses molécules, n'ont été faites que pour une lumière incidente non polarisée ($M = C = S = O$) ou polarisée linéairement soit dans le plan de diffusion ($M = I$, $C = S = 0$), soit dans le plan perpendiculaire ($M = -I$, $C = S = 0$). Ces cas ne font intervenir que les coefficients a_1 et b_1 et par suite, seulement les carrés des modules des coefficients complexes A_1 et A_2, mais non la relation de phase correspondant à la différence de leurs arguments, relation de phase qui ne peut être atteinte que par la détermination de l'un des coefficients a_3 ou b_2.

Pour étudier les écarts par rapport à la diffusion par une très petite sphère (diffusion dipolaire électrique), on peut, soit étudier les variations des coefficients de diffusion en fonction de l'angle de diffusion Φ, soit mesurer dans une direction déterminée les rapports des coefficients de diffusion (taux de polarisation). Le critérium le plus sûr d'une diffusion multipolaire est l'existence d'un coefficient b_2 différent de zéro (F. P., I, p. 50), qui se manifestera

par l'apparition d'une certaine circularité de la lumière diffusée ($S' \neq 0$) pour une lumière incidente polarisée linéairement, mais dans une direction oblique par rapport au plan de diffusion ($C \neq 0$, $S = 0$). L'existence du facteur ρ^5 dans l'expression de b_2 montre que c'est seulement pour les sphères de rayon peu inférieur à $\frac{\lambda}{2\pi}$ (sans doute au moins 0,02 ou 0,03 μ) que pourra apparaître une valeur décelable de ce coefficient b_2. L'étude de la circularité de la lumière diffusée par des solutions de macromolécules ne donnera donc de résultats que pour des molécules énormes (poids moléculaire supérieur à 100 millions).

C'est au voisinage d'une direction perpendiculaire au faisceau incident que les taux de polarisation de la lumière diffusée sont le plus intéressants à étudier. Pour $\Phi = \frac{\pi}{2}$ on trouve, en calculant les deux premiers termes des développements suivant les puissances de ρ,

$$\left.\begin{aligned}
a_1 - b_1 &\simeq \frac{R^2}{(k_e r)^2} = \frac{1}{(k_e r)^2}\left(\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 2}\right)^2 \left(1 + \frac{6}{5}\frac{\nu^2 - 2}{\nu^2 + 2}\rho^2\right)\rho^6, \\
\frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1} &\simeq \frac{1}{225}\left[\frac{(\nu^2 - 1)(\nu^2 + 2)}{2\nu^2 + 3}\right]^2 \\
&\quad \times \left[1 + \frac{8}{105}\frac{5\nu^6 - 14\nu^4 + 12\nu^2 + 32}{(2\nu^2 + 3)(\nu^2 + 2)}\rho^2\right]\rho^4, \\
\frac{a_3}{a_1 - b_1} &\simeq \frac{1}{15}\frac{(\nu^2 - 1)(\nu^2 + 2)}{2\nu^2 + 3} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{4}{105}\frac{5\nu^6 - 14\nu^4 + 12\nu^2 + 32}{(2\nu^2 + 3)(\nu^2 + 2)}\rho^2\right]\rho^2, \\
\frac{b_2}{a_1 - b_1} &\simeq -\frac{2}{45}\frac{(\nu^2 - 1)^2}{2\nu^2 + 3} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{1}{210}\frac{26\nu^6 - 50\nu^4 - 273\nu^2 + 192}{(2\nu^2 + 3)(\nu^2 - 1)}\rho^2\right]\rho^5.
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Pour cette même diffusion à angle droit on aurait pour de très petites particules de forme quelconque (F. P., I, p. 50) :

$$a_2 + b_1 = 0, \qquad a_3 = a_4 = 0, \qquad b_2 = 0.$$

L'écart par rapport à une telle diffusion dipolaire quelconque, écart dû à une grosseur non négligeable des particules diffusantes, doit être décelé le plus facilement par une valeur non nulle du taux $a_3 : (a_1 - b_1)$, qui d'après la troisième des formules (26) est proportionnel seulement au carré de ρ (tandis que $(a_1 + b_1) : (a_1 - b_1)$ est proportionnel à la quatrième puissance, et $b_2 : (a_1 - b_1)$ à la cinquième puissance de ρ). Un coefficient a_3 non nul pour $\Phi = \frac{\pi}{2}$ se manifestera par une certaine inclinaison de la direction de polarisation de la lumière diffusée à angle droit quand la direction de polarisation de la lumière incidente est elle-même oblique par rapport au plan de diffusion.

Remarquons enfin que $a_1 + b_1$ et a_3 doivent s'annuler à peu près pour la même direction de diffusion déterminée par

$$\cos\Phi = -\frac{1}{15}\frac{\nu^2 + 2}{2\nu^2 + 3}(\nu^2 - 1)\rho^2. \qquad (27)$$

C'est une direction un peu inclinée vers l'arrière; dans cette direction l'intensité de la lumière diffusée sera nulle si la lumière incidente est polarisée linéairement dans le plan de diffusion, et il n'y aura aucune obliquité de polarisation de la lumière diffusée quelle que soit l'obliquité de la polarisation de la lumière incidente.

Nous remercions G. Domergue, qui a vérifié certains calculs de ce travail.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] PERRIN F. — *J. Phys. Rad.*, 1942, **3**, 41 (F. P., I); *Chem. Phys.*, 1942, **10**, 415 (F. P., II).
[2] D'abord appliqué dans ce domaine par KRISHNAN R. S. — *Proc. Ind. Acad. Sc.*, 1938, A, 21, 91 et 98.
[3] MIE G. — *Ann. Physik*, 1908, **25**, 377.
[4] DEBYE P. — *Ann. Physik*, 1909, **30**, 59.
[5] *Voir* notamment : VAN DER HULST H. C. — Optics of spherical particles, Amsterdam, 1946.

CONSTRUCTION ET UTILISATION DE PETITES CHAMBRES AU TRIFLUORURE DE BORE

Par R. CAILLAT, C. LALLEMANT et G. VALLADAS.
Ingénieurs au Commissariat à l'Énergie atomique.
Laboratoires du Fort de Châtillon (Fontenay-aux-Roses).

Sommaire. — On décrit dans cet article une petite chambre à BF_3 appelée à rendre des services chaque fois que se pose le problème d'une bonne sensibilité dans la détection des neutrons lents jointe à un faible encombrement du détecteur. L'article contient également une discussion des conditions à remplir par l'appareillage électronique pour obtenir, entre autres choses, un temps de résolution et un rapport signal sur bruit de fond satisfaisants.

I. — Fabrication des chambres.

Après essai de plusieurs modèles, celui représenté ci-dessous (*fig.* 1) a été retenu de préférence aux autres en raison de la simplicité de sa fabrication.

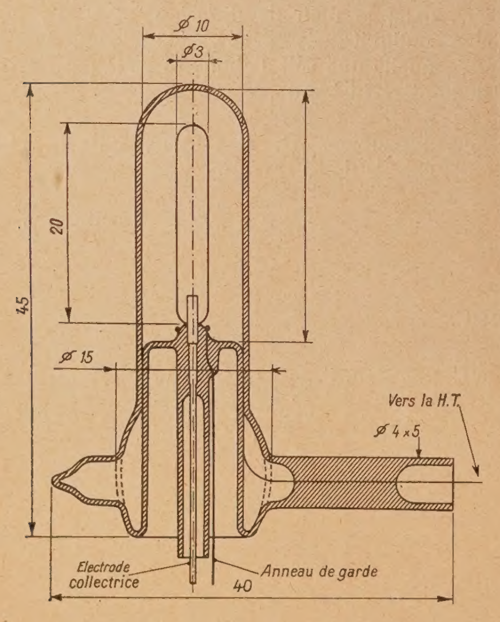


Fig. 1.

Matériel utilisé. — *a. Verre.* — Nous avons adopté le verre ordinaire E des « Cristalleries et Verreries réunies de Choisy-le-Roi » (qui ne contient qu'environ 1 pour 100 de bore) sous forme de tubes de 7 mm de diamètre intérieur (8 mm extérieur) et de 8 mm intérieur (9 mm extérieur).

b. L'électrode collectrice peut être en nickel, ou en acier inoxydable. Elle est montée sur un passage standard nickel-copperclad-cuivre et polie électrolytiquement avant le montage [1].

c. L'anneau de garde est en fil de platine de 0,2 mm de diamètre.

d. L'électrode haute tension est constituée par une argenture chimique de la surface intérieure d'un tube de verre [2].

Vérification. — Voici l'ordre de grandeur de l'efficacité d'isolement que cette construction permet d'atteindre :

Entre l'électrode collectrice et l'anneau de garde : 8.10^4 MΩ.

Entre l'électrode collectrice et l'électrode haute tension (l'anneau de garde à la masse) au-dessus de 10^7 MΩ.

Pour mesurer la résistance du contact de l'électrode haute tension, on introduit dans la tubulure de remplissage un fil de cuivre qui fait contact sur l'argenture. La résistance entre ce fil et la sortie de l'électrode haute tension est pratiquement nulle.

L'étanchéité des chambres ainsi montées est vérifiée; elles doivent au minimum tenir un vide de 10^{-3} mm de mercure pendant 10 h.

Pompage, étuvage et remplissage des chambres. — Les chambres sont vidées, étuvées et remplies de fluorure de bore préparé selon le procédé décrit dans un article à paraître au *Bulletin de la Société chimique de France.*

II. — Utilisation de la chambre à BF_3 pour le comptage des neutrons lents.

Généralités. — Nous allons considérer dans ce Chapitre le fonctionnement de la chambre à BF_3 et les conditions que doit remplir l'appareillage électronique qui s'y rattache.

Le choix de la pression de remplissage est régi par deux considérations : sensibilité et brièveté du temps de collection des ions (*voir* § III). Nous avons adopté la pression $p = 1,5$ kg : cm². Le temps maximum de collection des ions, quand on applique à la chambre une tension égale à 1300 V, vaut dans ces conditions environ 100 μ s. Le libre parcours moyen de capture d'un neutron thermique dans le BF_3 à $p = 1,5$ kg : cm² est de l'ordre de 35 cm. Comme les neutrons traversant la chambre y parcourent environ 1 cm en moyenne, la fraction détectée est de l'ordre de 3 pour 100.

La capture d'un neutron donne lieu à la réaction bien connue :

$$^{10}B(n, \alpha)^7Li.$$

La particule α et le noyau de lithium sont émis dans des sens opposés avec des énergies respectivement égales à 1,64 MeV et 0,94 MeV (¹).

Le travail d'ionisation dans le BF_3 valant 33,3 V [3], la capture d'un neutron conduit à la création de

$$n = \frac{1,64 + 0,94}{33,3} . 10^6 \simeq 78\,000 \text{ paires d'ions,}$$

soit environ 50 000 créées par la particule α et 28 000 par le noyau de lithium, si les trajectoires de ces deux particules sont situées entièrement dans la chambre. Si l'une des deux particules rencontre la paroi, le nombre de paires d'ions créées sera inférieur à la valeur indiquée mais ne descendra pas en général au-dessous de 28 000, cas où la particule α rencontre la paroi dès sa création.

Soit C la capacité totale de l'électrode collectrice par rapport à la terre et R la résistance de fuite de la grille du tube préamplificateur (*fig.* 2).

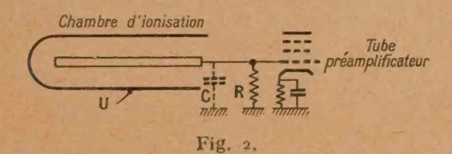


Fig. 2.

Dans notre cas, C vaut environ 10 pF et R $10^9\,\Omega$. La constante de temps de C est donc égale à $CR = 10^{-2}$ s. Cette valeur est grande par rapport au temps de collection des ions. La variation de tension de l'électrode collectrice quand tous les ions sont collectés est donc égale à

$$v_0 = \frac{ne}{C},$$

où n est le nombre de paires d'ions collectées, et e la charge de l'électron.

Compte tenu des nombres minimum et maximum de paires d'ions cités ci-dessus, nous voyons que v_0 sera compris entre

$$v_{0\,min} = 0,45 \text{ mV} \quad \text{et} \quad v_{0\,max} = 1,25 \text{ mV}.$$

Remarquons enfin que la forme de la courbe du potentiel de l'électrode collectrice en fonction du temps pendant la collection des ions, d'une part, le temps de collection des ions, d'autre part, dépendent de la position du point où la réaction a eu lieu ainsi que de la direction et des sens des particules émises. Supposons que les particules soient émises le long d'un axe parallèle à l'axe de la chambre et à la distance d de celui-ci. La figure 3 montre la

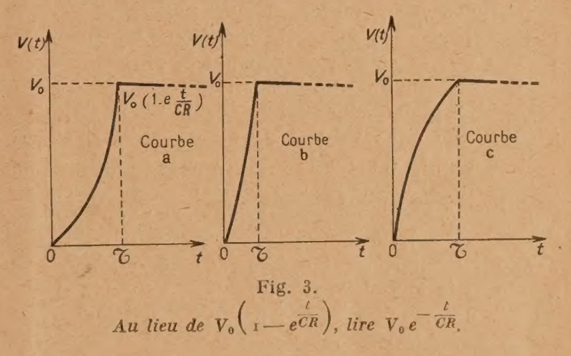


Fig. 3.

Au lieu de $V_0\left(1 - e^{\frac{t}{CR}}\right)$, *lire* $V_0 e^{-\frac{t}{CR}}$.

forme théorique de l'impulsion reçue par l'électrode collectrice dans les trois cas suivants : $d = R_2$ (courbe *a*), $d = 0,75\,R_2$ (courbe *b*), $d = R_1 = \frac{1}{3} R_2$ (courbe *c*), R_1 et R_2 désignant respectivement les rayons de l'électrode collectrice et de l'électrode extérieure.

Système amplificateur. — Soit G le gain total défini comme le rapport de l'amplitude V_0 d'une impulsion à la sortie de l'amplificateur à l'amplitude v_0 de cette impulsion à l'entrée du préamplificateur.

Avec les valeurs numériques adoptées plus haut v_0 est compris entre 0,45 et 1,25 mV. Avec un gain voisin de 50 000, V_0 sera compris entre

$$V_{0\,min} = 22,5 \text{ V} \quad \text{et} \quad V_{0\,max} = 62,5 \text{ V}.$$

Ce niveau d'amplitude est bien suffisant pour une mesure facile.

L'amplification proportionnelle des impulsions implique que le gain total G soit indépendant, entre certaines limites, de l'amplitude v_0 à l'entrée, ainsi

(¹) Les parcours correspondants dans le BF_3 à 1,5 kg : cm² sont respectivement égaux à 2,4 et 1 mm.

que de la forme des impulsions et en particulier du temps de collection des ions.

L'étage d'entrée du préamplificateur est le siège de fluctuations de tension dont les causes principales sont :

l'agitation thermique dans la résistance d'entrée;
le courant grille du premier tube;
l'effet « shot » dans le premier tube.

Ces fluctuations se superposent au signal et sont amplifiées avec lui. Il faut donc limiter leur amplitude moyenne efficace à la sortie de l'amplificateur à une valeur fixée assez petite par rapport à l'amplitude la plus petite $V_{0\min}$ des impulsions à la sortie.

Cela suppose un choix spécial du premier tube et de son montage. Mais l'amplitude moyenne efficace de la tension fluctuante à la sortie dépend de la courbe de réponse en fréquence de l'amplificateur. Celle-ci ne peut être choisie arbitrairement sans qu'on tienne compte des caractéristiques des impulsions à amplifier. Nous reviendrons dans le paragraphe III sur cette question et nous montrerons que la courbe de réponse la plus favorable est le résultat d'un compromis.

D'autres phénomènes parasites sont venus s'ajouter à ceux que nous venons de mentionner. Il s'agit, tout d'abord, du fond continu constitué par les petites impulsions provenant du rayonnement γ issu de la source de neutrons que nous avons utilisée (50 mC RaBe), et qui subsistent encore en partie quand on interpose un écran de plomb entre la source et la chambre. D'autre part, l'énergie transmise à un noyau de bore par choc élastique d'un neutron rapide peut atteindre 0,7 MeV. Les impulsions produites par ce phénomène dépassent notablement le bruit de fond. La distance entre la source et la chambre doit être déterminée de façon à réduire au minimum le nombre de ces impulsions par rapport au nombre de celles qui sont dues à la capture d'un neutron lent. Nous devons envisager également les perturbations dues à l'effet microphonique.

Discrimination des impulsions et comptage des neutrons. — L'amplificateur est suivi d'un sélecteur d'amplitude qui s'empare des impulsions dont l'amplitude dépasse un certain seuil S et les transforme en signaux rectangulaires uniformes. Ces signaux sont destinés à actionner une échelle de 100 qui suit le sélecteur d'amplitude.

Le discriminateur permet d'étudier la loi de variation en fonction de S, du nombre moyen N de coups comptés pendant un intervalle de temps déterminé. La courbe $N = f(S)$ sera appelée « courbe de discrimination ». Elle comporte ordinairement une portion AB qui correspond aux signaux parasites, un palier BC et une partie plongeante CD (*fig.* 4).

La partie BC s'explique ainsi : quand le seuil est en dessous de l'amplitude $V_{0\min}$ des impulsions les plus petites, mais au-dessus des signaux parasites, N est indépendant de S et égal au nombre de neutrons capturés dans la chambre.

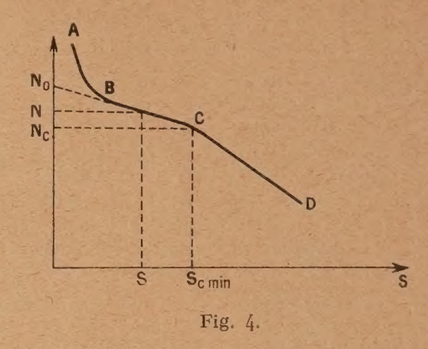


Fig. 4.

En réalité, le palier BC présente une faible pente. Nous avons admis jusqu'ici que le nombre de paires d'ions produites avait un minimum correspondant au cas où la particule α rencontre la paroi dès sa création, le parcours du noyau de lithium restant dans la chambre et créant $n_{\min} = 28\,000$ paires d'ions tous collectés. Il n'en est pas toujours ainsi :

a. le noyau de lithium peut à son tour rencontrer la paroi de la chambre (effets de courbure de paroi et d'angle). La probabilité de ce cas est d'ailleurs faible;

b. un certain nombre d'ions peut ne pas être collecté. Ce sont ceux qui naissent dans le volume contrôlé par l'anneau de garde ou qui disparaissent par recombinaison.

Ce dernier effet a lieu notamment dans les régions où le champ électrique est le plus faible et surtout le long du parcours de la particule la plus lourde (Li). La tension appliquée entre les électrodes de la chambre doit donc être suffisante pour que le nombre d'ions perdus soit faible.

La pente du palier et la présence de tensions parasites rendent difficile l'évaluation des nombres de neutrons capturés dans la chambre. Mais il suffit parfois de connaître des nombres proportionnels aux nombres de neutrons capturés. Pour discuter de plus près ce problème, nous introduisons la grandeur définie par l'expression

$$a = \frac{N_0 - N_c}{N_0},$$

N_0 étant défini en extrapolant le palier jusqu'à l'axe des N (*fig.* 4) et N_c étant lu au début du palier ($S_c = V_{0\min}$).

Le nombre N_0 extrapolé est présumablement très voisin du nombre de neutrons capturés dans la chambre et nous avons vérifié que a reste constant quand N_0 varie, entre certaines limites. Nous admettrons donc que le nombre N correspondant à un

seuil S fixe pris à l'intérieur du palier est dans un rapport bien défini avec le nombre de neutrons capturés dans la chambre. Ce rapport a sensiblement pour valeur :

$$\frac{N}{N_0} = 1 - a\frac{S}{S_c} = 1 - a\frac{S}{V_{0\,min}}, \quad \text{où} \quad V_{0\,min} = G v_{0\,min}.$$

Nous allons déterminer maintenant les erreurs que nous pouvons commettre sur N. En laissant de côté les erreurs statistiques, les erreurs sur N ont trois causes principales :

1° L'amplificateur n'est pas stable et le gain total peut prendre toutes valeurs possibles entre $G - \Delta G$ et $G + \Delta G$.

L'erreur relative commise a pour valeur :

$$\left|\frac{\Delta N}{N}\right| \neq \left|\frac{\Delta N}{N_0}\right| = a\frac{S}{S_c}\frac{\Delta G}{G}.$$

avec

$$a \simeq 0{,}15, \qquad \frac{S}{S_c} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\Delta G}{G} < 0{,}01, \qquad \left|\frac{\Delta N}{N}\right| < 0{,}00075.$$

2° Le seuil du sélecteur d'amplitude n'est pas stable et oscille entre $S - \Delta S$ et $S + \Delta S$.

L'erreur relative commise a pour valeur :

$$\left|\frac{\Delta N}{N}\right| \neq \left|\frac{\Delta N}{N_0}\right| = a\frac{\Delta S}{S}\frac{S}{S_c},$$

avec

$$\frac{\Delta S}{S} = 0{,}01, \qquad \frac{\Delta N}{N} < 0{,}00075.$$

3° La tension U appliquée à la chambre n'est pas stable. On peut déterminer l'erreur commise dans ce cas en traçant la courbe qui exprime N en fonction de U en laissant le seuil S fixe. La courbe obtenue a l'allure donnée par la figure 5. Cette courbe

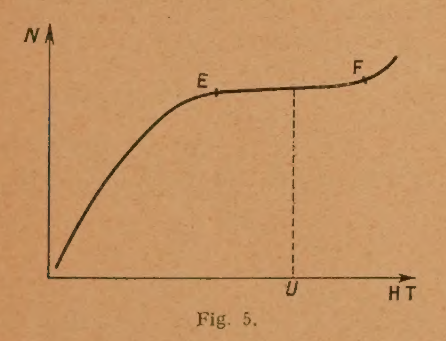


Fig. 5.

présente un palier EF et, au delà, une partie ascendante provenant d'impulsions parasites.

Quand on choisit une tension à l'intérieur du palier, l'erreur relative sur N est négligeable devant les autres erreurs si

$$\frac{\Delta U}{U} < 0{,}01.$$

L'erreur relative totale maximum estimée serait donc égale à

$$0{,}75 \cdot 10^{-3} + 0{,}75 \cdot 10^{-3} = 1{,}5 \cdot 10^{-3},$$

avec les valeurs numériques adoptées plus haut. En pratique, cette erreur est inférieure à 10^{-3}. L'instabilité du gain de l'amplificateur et du seuil du sélecteur d'amplitude ont en effet pour cause principale l'instabilité de la tension du secteur alimentant les appareils de sorte que les accroissements de gain et de seuil sont de même sens. Les erreurs correspondantes sur N sont de sens contraires et se compensent partiellement.

III. — Description de l'appareillage électronique employé en conjonction avec la chambre à BF_3.

Préamplificateur (*fig.* 6). — Avec les tensions

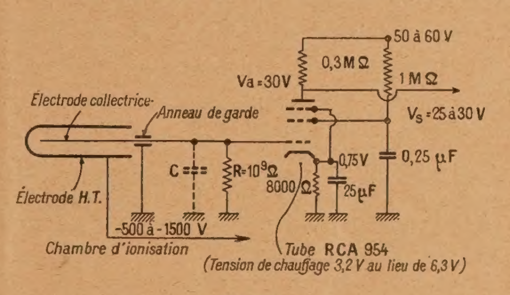


Fig. 6.

indiquées, le courant de grille du premier tube est inférieur à $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ A et la pente comprise entre 150 et 200 µA : V. La résistance d'isolement entre l'électrode collectrice et l'électrode haute tension de la chambre d'ionisation valant 10^{13} à $10^{14}\,\Omega$, nous avons limité à $10^{9}\,\Omega$ la résistance de fuite de la grille du premier tube pour réduire à quelques centièmes de volt la tension imposée à la grille quand la haute tension est appliquée à la chambre. Avec ce montage, la capacité totale d'entrée est de l'ordre de 10 pF et la plus petite charge décelable est comprise entre 2 000 et 4 000 fois la charge d'un électron.

Amplificateur. — Il y a deux façons de procéder pour rendre le gain G indépendant de la forme des impulsions et du temps de collection entre les limites imposées par la chambre d'ionisation.

A. La première consiste à amplifier les impulsions sans les déformer. Cela revient à donner à l'amplificateur une courbe de réponse en fréquence telle que les composantes spectrales des impulsions soient toutes transmises avec le même gain, entre

certaines limites. Si, par exemple, la bande passante de l'amplificateur est comprise entre les fréquences f_1 et f_2 définies par les relations

$$f_1 = \frac{1}{100\,\tau_{max}}, \qquad f_2 = \frac{1}{\tau_{max}}.$$

τ_{max} étant le temps de collection le plus grand, la variation de gain est inférieure à 3 pour 100 environ quand le temps de collection passe de la valeur τ_{max} à $\frac{\tau_{max}}{2}$. Les inconvénients de ce procédé sont :

1° de conduire à une bande passante relativement large : 100 c : s à 10 000 c : s pour $\tau_{max} = 10^{-4}$ s avec les valeurs de f_1 et f_2 données, d'où un bruit de fond notable;

2° d'étendre la bande passante vers les fréquences basses. L'amplificateur transmettrait alors une partie des signaux parasites provenant du secteur (filtrage imparfait, inductions, etc.) et des perturbations microphoniques, si difficiles à éliminer;

3° de conduire à un temps de résolution grand. Celui-ci serait, en effet, de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{2\pi f_1}$ c'est-à-dire quelques millisecondes avec les valeurs numériques choisies plus haut.

B. Le second procédé consiste à donner à l'amplificateur une bande passante beaucoup plus étroite et à la fréquence f_1 une valeur beaucoup plus grande que celle définie par la relation

$$f_1 = \frac{1}{100\,\tau_{max}}.$$

La courbe de réponse en fréquence de l'amplificateur est définie entièrement par le filtre de la

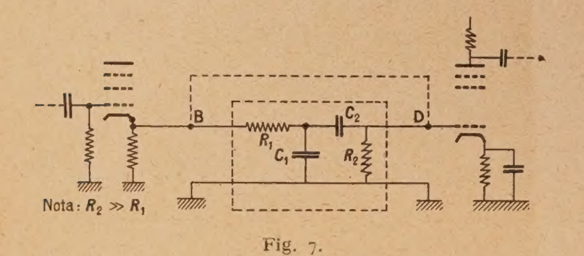


Fig. 7.

figure 7 inséré entre deux étages de l'amplificateur, si

$$R_1 C_1 \gg \frac{1}{2\pi f'_1}, \qquad R_2 C_2 \ll \frac{1}{2\pi f'_2};$$

où f'_2 et f'_1 désignent les fréquences qui limitent la bande passante [2] de l'amplificateur [3] quand on réunit B à D, en supprimant le filtre.

[2] $f'_1 = 20$ c : s, $f'_2 = 200\,000$ c : s pour l'amplificateur que nous avons réalisé.

[3] Préamplificateur compris.

Supposons que le potentiel de l'électrode collectrice varie linéairement avec le temps pendant la collection des ions et désignons par $V_B(t)$ et $V_D(t)$ les tensions transmises en B et D. $V_B(t)$ et $V_D(t)$ sont représentées par les courbes de la figure 8 pour des

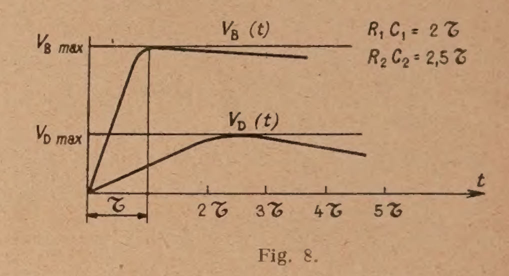


Fig. 8.

valeurs particulières de R_1C_1 et R_2C_2. L'amplitude $V_{B\,max}$ de l'impulsion en B est réduite dans le rapport

$$\theta = \frac{V_{D\,max}}{V_{B\,max}}.$$

La figure 9 donne les courbes représentatives de θ en fonction du temps de collection τ, pour différentes valeurs de R_1C_1 et R_2C_2.

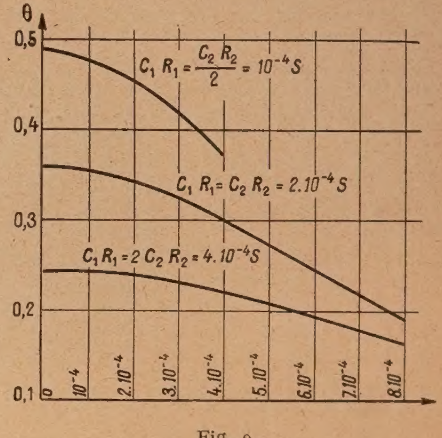


Fig. 9.

La courbe exprimant les variations de θ par rapport à sa valeur maximum (correspondant à $\tau = 0$), quand $R_1C_1 = R_2C_2$ est représentée figure 10.

Le gain de l'amplificateur peut s'écrire

$$G = \frac{V_0}{v_0} = G_1 G_2 \theta, \tag{1}$$

où G_1 désigne le gain (y compris le préamplificateur) jusqu'en B, et G_2 le gain de D à la sortie de l'amplificateur. G_1 et G_2 sont pratiquement indépendants du temps de collection. Seul le facteur θ en dépend,

comme nous venons de le voir. Ainsi que le montre la figure 10, θ ne varie pas plus de 1 pour 100 quand le temps de collection varie de $\frac{C_1R_1}{4}$ à $\frac{C_1R_1}{2}$, si $C_1R_1 = C_2R_2$. La variation de θ atteint 3 pour 100 quand τ varie de $\frac{C_1R_1}{2}$ à C_1R_1.

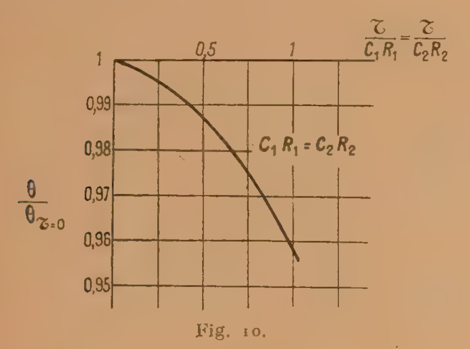


Fig. 10.

Nous pouvons donc considérer ces résultats comme satisfaisants et déterminer C_1R_1 et C_2R_2 à partir de la relation

$$C_1R_1 = C_2R_2 = 2\tau_{max}, \quad (2)$$

où τ_{max} est le temps de collection maximum. Si le temps de collection ne varie que du simple au double, le gain total G est défini à 1 pour 100 près et est donné par la relation (1) où l'on remplace θ par sa valeur :

$$G \neq 0,35\, G_1 G_2.$$

IV. — Résultats expérimentaux.

La figure 11 montre les courbes de sélection obtenues pour différentes valeurs de $C_1R_1 = C_2R_2$.

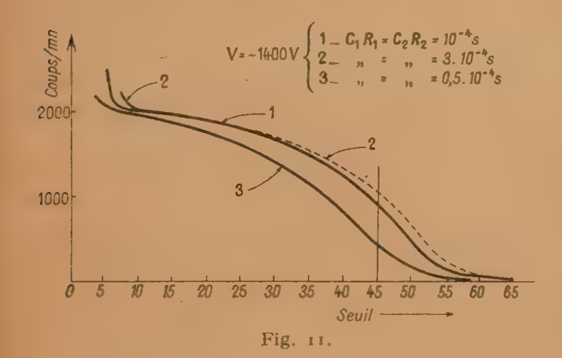


Fig. 11.

On notera que la courbe (2) correspondant à

$$C_1R_1 = C_2R_2 = 3.10^{-4}\ \text{s}$$

diffère peu de la courbe (1) correspondant à

$$C_1R_1 = C_2R_2 = 10^{-4}\ \text{s},$$

sauf en ce qui concerne le niveau des tensions parasites plus élevé pour la courbe (2) que pour la courbe (1). Il y a donc lieu de choisir la valeur 10^{-4} pour C_1R_1 et C_2R_2 bien que cette valeur soit égale au temps de collection maximum mesuré et non à la moitié comme le voudrait la relation (2). La courbe (3) indique qu'une valeur plus petite conduit à une nette diminution des amplitudes des impulsions et à une augmentation de la pente du palier. Ce phénomène est encore plus net sur les courbes de la figure 12. La

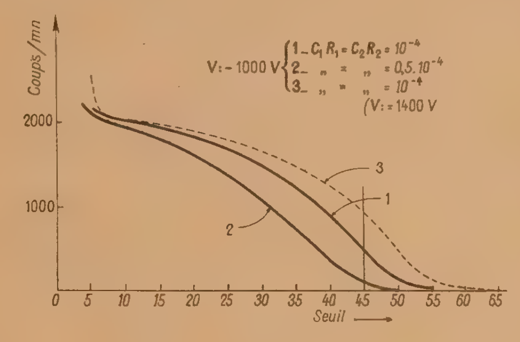


Fig. 12.

tension U appliquée à la chambre est plus petite : le palier de la courbe (2) est en voie de disparition, ce qui correspond à une augmentation du temps de collection.

La figure 13 montre les courbes obtenues en faisant

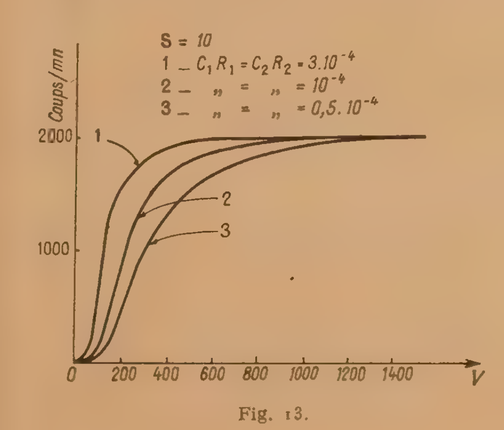


Fig. 13.

varier la tension U appliquée à la chambre, le seuil S étant constant et égal à 10 V. Comme on pouvait s'y attendre, le palier de ces courbes est d'autant prononcé que R_1C_1 est plus grand. Pour $C_1R_1 = C_2R_2 = 10^{-4}$ s la tension U appliquée à la chambre peut être fixée à 1300 V.

La courbe de réponse en fréquence de l'amplifi-

cateur pour $C_1R_1 = C_2R_2 = 10^{-4}$ s est montrée sur la figure 14. Nous avons porté sur la même

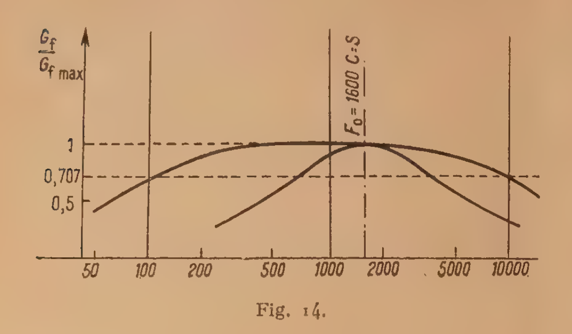


Fig. 14.

figure la courbe de réponse, dans le cas, évoqué plus haut, où

$$f_1 = 100 \text{ c:s}, \qquad f_2 = 10^4 \text{ c:s}.$$

Temps de résolution. — La figure 15 montre

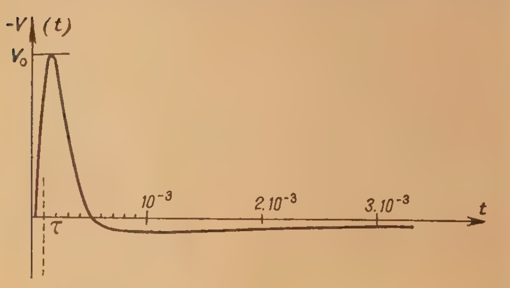


Fig. 15.

la forme, vue à l'oscilloscope, d'une impulsion à la sortie de l'amplificateur. On constate que la tension $V(t)$ repasse par la valeur zéro, au bout d'un temps égal à environ 5.10^{-4} s, atteint une valeur positive maximum égale approximativement à $\frac{V_0}{10}$ et décroît très lentement avec une constante de temps de l'ordre de 0,01 s.

Discriminateur (*fig.* 16). — La sélection d'am-

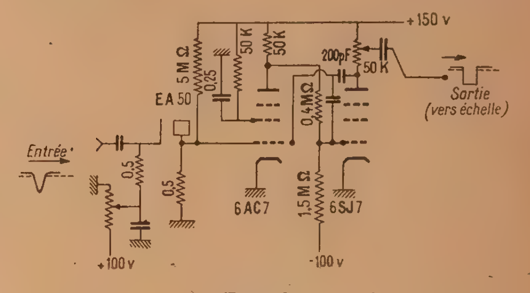


Fig. 16.

plitude est obtenue à l'aide d'une diode dont la cathode est polarisée à la tension correspondant au seuil choisi. La diode est suivie d'un circuit à détente. La plus petite impulsion que puisse enregistrer le sélecteur d'amplitude est inférieure à 1 V. Le temps de résolution est de l'ordre de 3.10^{-4} s.

Stabilité. — Pour minimiser l'influence des variations du secteur sur le gain de l'amplificateur et le fonctionnement du sélecteur d'amplitude, nous utilisons des lampes Fe-H en série dans le primaire des transformateurs d'alimentation. Les filaments du préamplificateur sont chauffés à partir d'un accumulateur. Une stabilité du gain de l'amplificateur et du seuil S du sélecteur à ± 1 pour 100 est assez satisfaisante comme nous l'avons vu plus haut.

Note. — Ce travail a été effectué dans le courant de l'année 1948. Nous remercions M. A. Rogozinski qui nous a aidé dans la rédaction de ce mémoire.

Manuscrit reçu le 12 octobre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Jacquet P. A. — *Métaux, corrosion, usure*, 1949, **18**, 198.
[2] Caillat R., Conreur J. et Lallemant C. — *Bull. Soc. Chim. Fr.*, 1948, **15**, 763.
[3] Dick L., Falk-Vairant P. et Rossi J. — *Helv. Phys. Acta*, 1947, **20**, 357.

THÉORIE UNITAIRE AFFINE DU CHAMP PHYSIQUE

Par Mme M. A. TONNELAT.

Sommaire. — Je suppose qu'une fonction d'action quelconque dépend uniquement des coefficients de connexion de la variété affine par l'intermédiaire des cinq tenseurs du second ordre que l'on peut former par contraction du tenseur de courbure. J'obtiens ainsi une équation qui généralise l'équation fondamentale de la relativité générale. J'en déduis la solution générale rigoureuse, c'est-à-dire l'expression de la connexion affine en fonction des densités résultant des tenseurs de base. Il est alors possible de déterminer les équations rigoureuses des champs.

Introduction. — Les théories unitaires classiques ont pour but d'interpréter les phénomènes gravifiques et électromagnétiques comme des manifestations des propriétés géométriques de l'univers. Ce but peut être poursuivi dans deux directions différentes :

On peut modifier le nombre des dimensions de l'univers, considérer, par exemple, un univers à cinq dimensions. Cette voie, inaugurée par Kaluza (1921), a été reprise par Einstein dans sa deuxième théorie unitaire (théorie d'Einstein-Mayer). Les théories *projectives* telles que celles de Shouten et de Pauli s'y rattachent en ce sens qu'elles constituent aussi une modification du groupe de transformation de Lorentz. Comme le fait remarquer très justement Einstein, ces tentatives constituent des théories unitaires *au sens fort*, car électromagnétisme et gravitation apparaissent comme deux phénomènes qu'on peut représenter par les composantes d'un même être géométrique. Ils ne peuvent être envisagés indépendamment l'un de l'autre. Il s'agit d'une synthèse analogue à celle qu'a réalisée la Relativité restreinte pour les champs électrique et magnétique.

On peut, au contraire, ne pas modifier le groupe de Lorentz, mais généraliser les hypothèses qui président au transport parallèle d'un vecteur le long d'un contour fermé infiniment petit. Il est possible, en effet, de considérer des variétés à connexion affine plus générales que les variétés riemanniennes :

1. Soit en supposant, avec Weyl, que le transport parallèle d'un vecteur modifie sa longueur. Géométriquement, cela revient à supposer que la variété considérée est douée d'une courbure supplémentaire, dite courbure d'homothétie. Analytiquement on est amené à envisager, à côté des changements de coordonnées et indépendamment de ces derniers, des transformations de jauge. L'ensemble est nécessaire pour déterminer complètement la connexion de l'univers et pour aboutir aux équations générales du champ physique.

2. Soit en supposant que le déplacement parallèle d'un vecteur ne modifie que sa direction, comme dans la géométrie de Riemann. Toutefois on généralise cette géométrie en postulant que l'univers admet une torsion. Les espaces tordus, introduits par M. Cartan ont été utilisés par M. Eyraud (1926) pour l'édification de théories unitaires, puis par Infeld (1928), enfin par Einstein (1929), qui essaya de construire une théorie unitaire en supposant l'existence d'un parallélisme absolu, c'est-à-dire d'un espace doué de torsion mais sans courbure.

Dans les deux cas, la conservation du groupe de Lorentz implique que le champ électromagnétique et le champ de gravitation doivent être regardés comme des êtres géométriques indépendants, liés seulement par les équations auxquelles ils obéissent. Ils sont « formellement » unifiés. Il s'agit là d'une unification *au sens faible* si l'on désire reprendre la terminologie d'Einstein.

Ici, nous considérerons uniquement ce deuxième type de théorie unitaire et, à l'intérieur de celui-ci, les théories du groupe 2 qui, seules, constituent la généralisation naturelle et immédiate de la Relativité générale.

Dans le cas d'une connexion affine générale, c'est-à-dire dès que l'univers est supposé doué simultanément d'une courbure et d'une torsion, il est extrêmement difficile de mener jusqu'au bout la théorie de façon rigoureuse. Autrement dit, la connexion affine de la variété ne s'exprime pas d'une façon simple en fonction des tenseurs fondamentaux si l'on ne restreint pas arbitrairement le nombre de ces derniers.

Plus précisément, le problème est le suivant : Les équations de la théorie se déduisent d'un principe d'action :

$$\delta \int \mathcal{A} \, d\tau = 0$$

appliqué à une fonction $\mathcal{A}$ indéterminée, mais qu'on suppose dépendre des coefficients de connexion et de leurs dérivées par l'intermédiaire d'un ou de plusieurs tenseurs du second rang. La généralisation la plus simple de la Relativité générale consiste à supposer que $\mathcal{A}$ dépend, d'ailleurs arbitrairement,

d'un tenseur $R_{\mu\nu}$ qui se déduit du tenseur d'Einstein $\mathring{R}_{\mu\nu}$ en remplaçant les symboles de Riemann Christoffel $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ par des coefficients quelconques $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$. On aboutit ainsi à un système de 64 équations linéaires dont la résolution, théoriquement élémentaire, est pratiquement inextricable.

Certains auteurs, partis d'une connexion affine générale, ont tourné la difficulté en supposant que $\mathfrak{L}$ ne dépend pas d'un $R_{\mu\nu}$ ainsi défini (¹). Récemment Einstein et Schrödinger ont repris la question en revenant au tenseur $R_{\mu\nu}$. En dépit d'ingénieuses combinaisons, il ne semble pas que le problème théoriquement simple de la détermination de la connexion affine en fonction des champs ait reçu une solution rigoureuse et en même temps exploitable (²). Alors que sa résolution est immédiate en Relativité générale, sa généralisation la plus naturelle semble donc se heurter à de grandes complications. Tout au plus peut-on dire avec Schrödinger que le problème est soluble d'une façon approchée et que l'on peut calculer les coefficients de connexion en fonction des champs avec l'approximation que l'on veut. Mais cette conclusion est loin d'être satisfaisante et constitue un obstacle dès que l'on veut poursuivre effectivement les calculs. Cependant, la théorie semble si naturelle, écrit Einstein, qu'elle justifie de grands efforts. Tel est précisément le but de ce travail (³).

1. **Les tenseurs fondamentaux et la connexion affine.** — Nous considérons une variété purement affine dont la connexion est définie par les 64 coefficients $\Delta^{\rho}_{\nu\mu}$. Nous distinguons les parties symétrique et antisymétrique de ces coefficients en posant

$$\Delta^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Lambda^{\rho}_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Les $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ étant symétriques et les $\Lambda^{\rho}_{\mu\nu}$ antisymétriques en μ, ν. Les 24 $\Lambda^{\rho}_{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur de torsion de la variété. Avec Einstein, remarquons que les Δ peuvent introduire deux formes de transport parallèle pour un vecteur ξ

$$\left.\begin{aligned} d\xi^{\rho}_{+} &= -\Delta^{\rho}_{\mu\nu}\xi^{\mu}\,dx^{\nu}, \\ d\xi^{\rho}_{-} &= -\Delta^{\rho}_{\nu\mu}\xi^{\mu}\,dx^{\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

tandis que les Γ définissent sans ambiguïté le transport parallèle habituellement considéré

$$d\xi^{\rho}_{0} = -\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\xi^{\mu}\,dx^{\nu}. \tag{3}$$

A l'aide des $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ on forme le tenseur de courbure

$$R^{\tau}{}_{\mu\nu\rho}(\Delta) = \partial_{\rho}\Delta^{\tau}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Delta^{\tau}_{\mu\rho} + \Delta^{\tau}_{\lambda\rho}\Delta^{\lambda}_{\mu\nu} - \Delta^{\lambda}_{\mu\rho}\Delta^{\tau}_{\lambda\nu}. \tag{4}$$

(¹) A. Einstein, *Ann. of Math.*, 1945, **46**, 578; *The meaning of relatavity* (Appendix 2ᵉ édition); E. Schrödinger, *Proc. of the Roy. In. Acad.*, 1946, **51 A 4**, 42; 1947, **51 A 13**, 163; 1948, **51 A 16**, 295; 1948, **52 A 1**, 1.

(²) *Cf.* Strauss, *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 414.

(³) *Cf.* M. A. Tonnelat, *C. R. Ac. Sc.*, 1950, **230**, 182; 1950, **231**, 470, 487, 512.

Mais on peut aussi former un autre tenseur de courbure avec les coefficients transposés

$$\tilde{\Delta}^{\rho}_{\mu\nu} = \Delta^{\rho}_{\nu\mu}.$$

On a

$$R^{\tau}{}_{\mu\nu\rho}(\tilde{\Delta}) = \partial_{\rho}\Delta^{\tau}_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\Delta^{\tau}_{\rho\mu} + \Delta^{\tau}_{\rho\lambda}\Delta^{\lambda}_{\nu\mu} - \Delta^{\lambda}_{\rho\mu}\Delta^{\tau}_{\nu\lambda}. \tag{5}$$

A partir de chacun de ces tenseurs on peut obtenir deux tenseurs contractés de première et de seconde espèce :

$$\left.\begin{aligned} P_{\mu\nu} &= R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}(\Delta) \\ &= \partial_{\rho}\Delta^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Delta^{\rho}_{\mu\rho} + \Delta^{\lambda}_{\mu\nu}\Delta^{\rho}_{\lambda\rho} - \Delta^{\lambda}_{\mu\rho}\Delta^{\rho}_{\lambda\nu}, \\ S_{\mu\nu} &= R^{\rho}{}_{\rho\mu\nu}(\Delta) = \partial_{\nu}\Delta^{\rho}_{\rho\mu} - \partial_{\mu}\Delta^{\rho}_{\rho\nu}; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{\mu\nu} &= R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}(\tilde{\Delta}) \\ &= \partial_{\rho}\Delta^{\rho}_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\Delta^{\rho}_{\rho\mu} + \Delta^{\lambda}_{\nu\mu}\Delta^{\rho}_{\rho\lambda} - \Delta^{\lambda}_{\rho\mu}\Delta^{\rho}_{\nu\lambda}, \\ T_{\mu\nu} &= R^{\rho}{}_{\rho\mu\nu}(\tilde{\Delta}) = \partial_{\nu}\Delta^{\rho}_{\mu\rho} - \partial_{\mu}\Delta^{\rho}_{\nu\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ces tenseurs, joints au tenseur

$$I_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}\Lambda_{\nu}, \tag{8}$$

constituent donc cinq tenseurs dont peut dépendre *a priori* toute fonction d'action arbitraire. On peut, comme je l'ai montré ailleurs, développer toute la théorie en supposant que la fonction d'action dépend des cinq tenseurs $P_{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$, $S_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ et $I_{\mu\nu}$, et trouver, même dans ce cas, la solution des équations fondamentales de la théorie.

Néanmoins, on simplifie beaucoup les calculs sans diminuer notablement l'intérêt des résultats obtenus en adoptant, comme le propose Einstein dans un travail dont je viens de prendre connaissance (⁴), un principe d'« hermiticité ».

Une expression A est dite hermitienne par rapport à μ et ν si elle ne change pas quand on transforme simultanément μ en ν et $\tilde{\Delta}$ en Δ. On a

$$A_{\mu\nu}(\Delta) = A_{\nu\mu}(\tilde{\Delta}).$$

Une expression A est antithermitienne en μ, ν si

$$A_{\mu\nu}(\Delta) = -A_{\nu\mu}(\tilde{\Delta}).$$

Einstein suppose que la fonction d'action dépend des seules combinaisons hermitiennes des tenseurs de base. On est donc conduit à former les combinaisons linéaires

$$\left.\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[P_{\mu\nu}(\Delta) + P_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})\right] \\ &\quad - \frac{1}{4}\left[S_{\mu\nu}(\Delta) + S_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})\right] \\ &= \partial_{\rho}\Delta^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\Gamma_{\nu} + \partial_{\nu}\Gamma_{\mu}) + \Delta^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma_{\lambda} - \Delta^{\lambda}_{\mu\rho}\Delta^{\rho}_{\lambda\nu}, \\ H_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu}(\Delta) + S_{\nu\mu}(\tilde{\Delta}) = \partial_{\mu}\Lambda_{\nu} - \partial_{\nu}\Lambda_{\mu}, \\ I_{\mu\nu} &= \Lambda_{\mu}\Lambda_{\nu}; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(⁴) A. Einstein, *The meaning of relativity* (Appendix 2ᵉ édition).

et

$$\left.\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= [P_{\mu\nu}(\Delta) - P_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})] - \frac{1}{2}[S_{\mu\nu}(\Delta) - S_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})] \\ &= \Delta^{\lambda}_{\mu\nu}\Lambda_\lambda - \frac{1}{2}(\partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu), \\ \Lambda_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}[S_{\mu\nu}(\Delta) - S_{\nu\mu}(\tilde{\Delta})] = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

et à postuler que la fonction d'action dépend des seules combinaisons $R_{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$, $I_{\mu\nu}$.

Enfin, avec Einstein, on peut substituer au tenseur la combinaison linéaire suivante

$$U_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{6}H_{\mu\nu} + \frac{1}{12}I_{\mu\nu}, \quad (11)$$

qui reste invariante dans une transformation

$$\Delta^{\rho}_{\mu\nu} = \overset{*}{\Delta}{}^{\rho}_{\mu\nu} + (\delta^{\rho}_{\mu}\varphi_\nu - \delta^{\rho}_{\nu}\varphi_\mu). \quad (12)$$

En particulier, si

$$\varphi_\rho = -\frac{1}{6}\Lambda_\rho, \quad (13)$$

c'est-à-dire si

$$\Delta^{\rho}_{\mu\nu} = \overset{*}{\Delta}{}^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{6}(\delta^{\rho}_{\mu}\Lambda_\nu - \delta^{\rho}_{\nu}\Lambda_\mu), \qquad \overset{*}{\Lambda}_\rho = 0, \quad (14)$$

le tenseur $U_{\mu\nu}(\Delta) = R_{\mu\nu}(\overset{*}{\Delta})$ ne dépend pas de Λ_ρ. Définissons les densités tensorielles

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial U_{\mu\nu}}, \qquad \mathcal{H}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial H^{\mu\nu}}, \qquad \mathcal{I}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial I_{\mu\nu}}, \quad (15)$$

et posons

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\mu\nu} - \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (16)$$

$\mathcal{G}^{\mu\nu}$ et $-\mathcal{F}^{\mu\nu}$ étant les parties symétrique et antisymétrique de $\mathcal{R}^{\mu\nu}$.

Considérons maintenant un tenseur $r_{\mu\nu}$ dont les éléments forment le déterminant r. Désignons par $rr^{\mu\nu}$ le mineur relatif à chaque $r_{\mu\nu}$.

Par définition

$$r_{\mu\sigma} r^{\mu\rho} = r_{\sigma\mu} r^{\rho\mu} = \delta^{\rho}_{\sigma}, \quad (17)$$

$$dr = rr^{\mu\nu}\, dr_{\mu\nu} = -rr_{\mu\nu}\, dr^{\mu\nu}. \quad (18)$$

Il résulte de (17)

$$dr^{\mu\nu} = -r^{\mu\lambda} r^{\rho\nu}\, dr_{\rho\lambda}, \qquad dr_{\mu\nu} = -r_{\mu\lambda} r_{\rho\nu}\, dr^{\rho\lambda}. \quad (19)$$

Les $r^{\mu\nu}$ se rattachent aux densités $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ en choisissant

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \sqrt{-r}\, r^{\mu\nu}. \quad (20)$$

On en déduit

$$r^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - f^{\mu\nu}, \quad (21)$$

en posant

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-r}\, f^{\mu\nu}, \qquad \mathcal{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-r}\, g^{\mu\nu}. \quad (22)$$

Désignons maintenant par $\gamma_{\mu\nu}$ et par $-\varphi_{\mu\nu}$ les parties symétrique et antisymétrique du tenseur $r_{\mu\nu}$

$$r_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \varphi_{\mu\nu}. \quad (23)$$

Appelons γ et φ les déterminants $|\gamma_{\mu\nu}|$ et $|\varphi_{\mu\nu}|$, $\gamma\gamma^{\mu\nu}$ et $\varphi\varphi^{\mu\nu}$ les mineurs relatifs aux éléments $\gamma_{\mu\nu}$ et $\varphi_{\mu\nu}$. On a les relations habituelles

$$\gamma_{\mu\sigma}\gamma^{\mu\rho} = \delta^{\rho}_{\sigma}, \qquad \varphi_{\mu\sigma}\varphi^{\mu\rho} = \delta^{\rho}_{\sigma}. \quad (24)$$

Le calcul du déterminant r en fonction de γ et de φ conduit aux résultats suivants :

$$r = \gamma + \varphi + \frac{\gamma}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma}\varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu\sigma} \quad (25)$$

et le mineur $rr^{\mu\nu}$ a l'expression

$$\begin{aligned} rr^{\mu\nu} = {} & \gamma\gamma^{\mu\nu} - \varphi\varphi^{\mu\nu} - \gamma\gamma^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho}\varphi_{\sigma\rho} \\ & + \gamma\gamma^{\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\tau\lambda} - \gamma^{\mu\tau}\gamma^{\nu\lambda}\right)\varphi_{\rho\tau}\varphi_{\sigma\lambda}, \end{aligned} \quad (26)$$

dont on déduit, en comparant avec (21),

$$g^{\mu\nu} = \frac{\gamma}{r}\gamma^{\mu\nu} + \gamma^{\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\tau\lambda} - \gamma^{\mu\tau}\gamma^{\nu\lambda}\right)\varphi_{\rho\tau}\varphi_{\sigma\lambda}, \quad (27)$$

$$f^{\mu\nu} = \frac{\varphi}{r}\varphi^{\mu\nu} + \frac{\gamma}{r}\gamma^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho}\varphi_{\sigma\rho}. \quad (28)$$

2. Obtention de l'équation fondamentale. — Cela étant posé, nous devons déduire les équations de la théorie d'un principe variationnel appliqué à la fonction d'action $\mathcal{A}$

$$\delta \int \mathcal{A}\, d\tau = 0. \quad (29)$$

Dans une théorie purement affine on suppose que $\mathcal{A}$, par l'intermédiaire des tenseurs de base, dépend uniquement des coefficients de connexion. On doit donc considérer uniquement les variations des 64 $^{\rho}_{\mu\nu}$. Les équations d'Euler

$$\frac{d}{dx^\sigma}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \dfrac{\partial \Delta^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Delta^{\rho}_{\mu\nu}} = 0, \quad (30)$$

équivalentes à (29), nous conduisent aux relations suivantes entre les densités

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-};\rho = {} & \frac{1}{6}(\delta^{\mu}_{\rho}\mathcal{R}^{\lambda\nu} - \delta^{\nu}_{\rho}\mathcal{R}^{\mu\lambda}) \\ & - \frac{1}{3}(\delta^{\mu}_{\rho}\mathcal{F}^{\nu} - \delta^{\nu}_{\rho}\mathcal{F}^{\mu}) \end{aligned} \quad (31)$$

et

$$\partial_\sigma \mathcal{H}^{\sigma\rho} = \mathcal{I}^{\rho\sigma}\Lambda_\sigma, \quad (32)$$

en posant

$$\mathcal{F}^{\mu} = \partial_\rho \mathcal{F}^{\rho\mu}. \quad (33)$$

et, selon les notations d'Einstein,

$$\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-};\rho = \partial_\rho \mathcal{R}^{\mu\nu} + \Delta^{\mu}_{\sigma\rho}\mathcal{R}^{\sigma\nu} + \Delta^{\nu}_{\rho\sigma}\mathcal{R}^{\mu\sigma} - \mathcal{R}^{\mu\nu}\Gamma_\rho. \quad (34)$$

Si l'on remplace $;\rho$ par la dérivée covariante $;\overset{*}{\rho}$ obtenue en substituant dans (34) les coefficients $\overset{*}{\Delta}{}^{\rho}_{\mu\nu}$ définis par (3), l'équation (31) s'écrit simplement

$$\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-};\overset{*}{\rho} = -\frac{1}{3}(\delta^{\mu}_{\rho}\mathcal{F}^{\nu} - \delta^{\nu}_{\rho}\mathcal{F}^{\mu}). \quad (35)$$

Enfin, on peut éliminer complètement le second nombre de (35). Il suffit pour cela d'écrire la dérivée covariante $\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-}; \rho'$ à l'aide de coefficients $\Delta'^{\rho}_{\mu\nu}$ tels que

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\Delta}{}^{\rho}_{\mu\nu} &= \Delta'^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} r_{\mu\nu} \bar{f}^{\rho} - \frac{1}{6}\left(\delta^{\rho}_{\mu} r_{\lambda\nu} - \delta^{\rho}_{\nu} r_{\mu\lambda}\right) f^{\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\delta^{\rho}_{\mu} r_{\nu\lambda} - \delta^{\rho}_{\nu} r_{\mu\lambda}\right)\left(f^{\lambda} + \bar{f}^{\lambda}\right), \\ \Gamma'_{\rho} &= \Gamma_{\rho} + \frac{1}{3} \varphi_{\rho\lambda} f^{\lambda} = \frac{1}{2r} \partial_{\rho} r, \\ \Lambda'_{\rho} &= 2 r_{\rho\lambda}\left(f^{\lambda} + \bar{f}^{\lambda}\right). \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

en posant

$$f^{\rho} = \frac{1}{\sqrt{-r}} \mathcal{F}^{\rho}, \qquad \bar{f}^{\rho} = \gamma^{\rho\lambda} \varphi_{\lambda\sigma} f^{\sigma}, \tag{37}$$

l'équation (35) s'écrit simplement

$$\mathcal{R}^{\mu\nu}_{+-}; \rho' = 0. \tag{38}$$

Ainsi les équations de la théorie se scindent en deux groupes dont l'un (35) ne dépend que des 60 $\overset{*}{\Delta}{}^{\rho}_{\mu\nu}$ indépendants $\left(\overset{*}{\Lambda}_{\rho} = 0\right)$ et dont l'autre (23) ne dépend que des Λ_{ρ}.

Si l'on écarte la solution triviale $\Lambda_{\rho} = 0$, les équations en divergence (32), jointes à la définition

$$H_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \Lambda_{\nu} - \partial_{\nu} \Lambda_{\mu},$$

montrent que $\mathcal{H}^{\mu\nu}$ vérifie des relations qui diffèrent des équations maxwelliennes par le second membre de (32). Λ_{ρ} joue donc le rôle d'un potentiel du type mésonique.

En ce qui concerne le groupe (38) [ou (34)] son développement en fonction des $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ s'écrit encore

$$\begin{aligned} &\partial_{\rho} \mathcal{R}^{\mu\nu} + \Delta^{\mu}_{\sigma\rho} \mathcal{R}^{\sigma\nu} + \Delta^{\nu}_{\rho\sigma} \mathcal{R}^{\mu\sigma} \\ &\quad - \mathcal{R}^{\mu\nu} \Gamma_{\rho} + \frac{1}{6}\left(\delta^{\nu}_{\rho} \mathcal{R}^{\mu\lambda} - \delta^{\mu}_{\rho} \mathcal{R}^{\lambda\nu}\right) \\ &\quad = -\frac{1}{3}\left(\delta^{\mu}_{\rho} \mathcal{F}^{\nu} - \delta^{\nu}_{\rho} \mathcal{F}^{\mu}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

En multipliant par $\frac{1}{\sqrt{-r}} r_{\mu\nu}$, on obtient

$$\Gamma_{\rho} = \frac{1}{2r} \partial_{\rho} r - \frac{1}{3} \varphi_{\rho\lambda} f^{\lambda}. \tag{40}$$

La substitution dans (39) donne alors simplement

$$r^{\mu\nu}_{+-}; \overset{*}{\rho} = -\frac{1}{3}\left(\delta^{\mu}_{\rho} f^{\nu} - \delta^{\nu}_{\rho} f^{\mu}\right) - \frac{1}{3} r^{\mu\nu} \varphi_{\rho\lambda} f^{\lambda} \tag{41}$$

ou, ce qui revient au même,

$$r^{\mu\nu}_{+-}; \rho' = 0. \tag{42}$$

Sous la forme (38) ou (42) les équations fondamentales de la théorie constituent une généralisation simple des équations de la relativité générale

$$g^{\mu\nu}; \rho = 0. \tag{43}$$

Les équations (42) ne sont pas modifiées si l'on change les indices μ et ν l'un dans l'autre et si l'on remplace simultanément $\Delta'^{\rho}_{\mu\nu}$ et $r_{\mu\nu}$ par

$$\tilde{\Delta}'^{\rho}_{\mu\nu} = \Delta'^{\rho}_{\nu\mu}, \qquad \tilde{r}_{\mu\nu} = r_{\nu\mu}. \tag{44}$$

On constate facilement, en utilisant les définitions (13) et (36), que les conditions

$$\tilde{\Delta}^{\rho}_{\mu\nu} = \Delta^{\rho}_{\nu\mu}, \qquad \tilde{r}_{\mu\nu} = r_{\nu\mu} \tag{45}$$

entraînent (44). (On a $\tilde{f}^{\rho} = -f^{\rho}$ et $\tilde{\bar{f}}^{\rho} = \bar{f}^{\rho}$). L'herміticité des tenseurs de base réalisée dans l'hypothèse (45) est donc bien cohérente avec l'hermiticité de (43) et l'hypothèse (44).

C'est la résolution rigoureuse de la très simple équation (42) qui va maintenant nous occuper.

3. Résolution de l'équation fondamentale et détermination de la connexion affine.

— L'équation fondamentale (42) s'écrit

$$r^{\mu\nu}_{+-}; \rho' \equiv \partial_{\rho} r^{\mu\nu} + \Delta'^{\mu}_{\sigma\rho} r^{\sigma\nu} + \Delta'^{\nu}_{\rho\sigma} r^{\mu\sigma} = 0. \tag{46}$$

Les composantes $r_{\alpha\beta}$ satisfont une équation analogue qu'on obtient en multipliant (46) par $r_{\alpha\nu}\, r_{\mu\beta}$. On a, d'après (17) et (19),

$$\partial_{\rho} r_{\mu\nu} - \Delta'^{\sigma}_{\mu\rho} r_{\sigma\nu} - \Delta'^{\sigma}_{\rho\nu} r_{\mu\sigma} = 0. \tag{47}$$

Scindons (47) en parties symétrique et antisymétrique en μ, ν en utilisant la décomposition (23). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} &\partial_{\rho} \gamma_{\mu\nu} - \left(\gamma_{\sigma\mu} \Gamma'^{\sigma}_{\nu\rho} + \gamma_{\sigma\nu} \Gamma'^{\sigma}_{\mu\rho}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\varphi_{\sigma\mu} \Lambda'^{\sigma}_{\nu\rho} + \varphi_{\sigma\nu} \Lambda'^{\sigma}_{\mu\rho}\right) = 0, \end{aligned} \tag{S$_1$}$$

$$\begin{aligned} &\partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\gamma_{\sigma\mu} \Lambda'^{\sigma}_{\nu\rho} + \gamma_{\sigma\nu} \Lambda'^{\sigma}_{\rho\mu}\right) \\ &\quad + \left(\varphi_{\sigma\mu} \Gamma'^{\sigma}_{\nu\rho} - \varphi_{\sigma\nu} \Gamma'^{\sigma}_{\mu\rho}\right) = 0. \end{aligned} \tag{A$_1$}$$

Nous allons introduire maintenant les symboles

$$\left.\begin{aligned} [\mu\nu, \rho] &= \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu} \gamma_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \gamma_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \gamma_{\mu\nu}\right), \\ \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} &= \frac{1}{2} \gamma^{\rho\sigma}\left(\partial_{\mu} \gamma_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} \gamma_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} \gamma_{\mu\nu}\right), \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

et appeler $\overset{\circ}{D}$ la dérivée covariante qui utilise ces symboles

$$\overset{\circ}{D}_{\rho} \varphi_{\mu\nu} = \partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} - \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \varphi_{\sigma\nu} - \left\{ {\sigma \atop \nu\rho} \right\} \varphi_{\mu\sigma}, \tag{49}$$

avec, par définition,

$$\overset{\circ}{D}_{\rho} \gamma_{\mu\nu} = 0. \tag{50}$$

Permutons ρ et μ puis ρ et ν dans (S$_1$) et dans (A$_1$). On obtient des équations (S$_2$) et (A$_2$), puis (S$_3$) et (A$_3$). Formons (S$_2$) + (S$_3$) — (S$_1$), ainsi

que $(A_2) + (A_3) + (A_1)$. Il vient

$$2\gamma_{\rho\lambda} u^{\lambda}_{\mu\nu} + (\varphi_{\lambda\mu} \Lambda'^{\lambda}_{\nu\rho} - \varphi_{\lambda\nu} \Lambda'^{\lambda}_{\mu\rho}) = 0, \qquad (S)$$

$$-I_{\mu\nu\rho} + 2\overset{\circ}{D}_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + \gamma_{\sigma\rho}\Lambda'^{\sigma}_{\mu\nu} + 2(\varphi_{\sigma\mu} u^{\sigma}_{\nu\rho} - \varphi_{\sigma\nu} u^{\sigma}_{\mu\rho}) = 0, \qquad (A)$$

en posant

$$u^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \qquad (51)$$

et

$$I_{\mu\nu\rho} = \partial_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\varphi_{\rho\mu} + \partial_{\mu}\varphi_{\nu\rho}. \qquad (52)$$

Notons qu'en formant $(A_2) + (A_3) - (A_1)$ et $(S_2) + (S_3) + (S_1)$, on obtient les équations (A′) et (S′), qui sont aussi les conséquences de (A) et de (S),

$$-I_{\mu\nu\rho} + \gamma_{\sigma\rho}\Lambda'^{\sigma}_{\mu\nu} + \gamma_{\sigma\nu}\Lambda'^{\sigma}_{\rho\mu} + \gamma_{\sigma\mu}\Lambda'^{\sigma}_{\nu\rho} = 0, \qquad (A')$$

$$\gamma_{\sigma\rho} u^{\sigma}_{\mu\nu} + \gamma_{\sigma\nu} u^{\sigma}_{\rho\mu} + \gamma_{\sigma\mu} u^{\sigma}_{\nu\rho} = 0. \qquad (S')$$

En multipliant par $\gamma^{\lambda\sigma}$ nous tirons de (S) :

$$2u^{\lambda}_{\mu\nu} = -\gamma^{\lambda\rho}(\varphi_{\sigma\mu}\Lambda'^{\sigma}_{\nu\rho} + \varphi_{\sigma\nu}\Lambda'^{\sigma}_{\mu\rho}); \qquad (53)$$

et, en substituant dans (A), nous obtenons finalement

$$V_{\mu\nu,\rho} - \gamma^{\sigma\lambda}(\varphi_{\sigma\nu}\overline{V}_{\mu\lambda\rho} - \varphi_{\sigma\mu}\overline{V}_{\nu\lambda\rho}) - 2\gamma^{\sigma\lambda}(\varphi_{\sigma\nu}V_{\rho\lambda,\overline{\mu}} - \varphi_{\sigma\mu}V_{\rho\lambda,\overline{\nu}}) + \overline{\overline{V}}_{\mu\nu\rho} - V_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} = -2\overset{\circ}{D}_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + I_{\mu\nu\rho}, \qquad (E)$$

en utilisant les notations

$$\left.\begin{aligned} &V_{\mu\nu,\rho} = \gamma_{\rho\sigma}\Lambda'^{\sigma}_{\mu\nu}, \\ &V_{\mu\nu,\overline{\rho}} = \varphi_{\rho\lambda}\gamma^{\lambda\sigma}V_{\mu\nu,\sigma} = \varphi_{\rho\lambda}\Lambda'^{\lambda}_{\mu\nu}, \\ &V_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} = \varphi_{\rho\lambda}\gamma^{\lambda\sigma}V_{\mu\nu,\overline{\sigma}}, \quad \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

et

$$\left.\begin{aligned} &V_{\mu\nu\rho} = V_{\mu\nu,\rho} + V_{\rho\mu,\nu} + V_{\nu\rho,\mu}, \\ &\overline{V}_{\mu\nu\rho} = V_{\mu\nu,\overline{\rho}} + V_{\rho\mu,\overline{\nu}} + V_{\nu\rho,\overline{\mu}}, \\ &\overline{\overline{V}}_{\mu\nu\rho} = V_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} + V_{\rho\mu,\overline{\overline{\nu}}} + V_{\nu\rho,\overline{\overline{\mu}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Les 64 équations (47) peuvent donc être remplacées par les 40 équations (S) qui expriment les coefficients symétriques $u^{\rho}_{\mu\nu}$ en fonction des $\Lambda'^{\rho}_{\mu\nu}$ et par les 24 équations (E) qui expriment les coefficients antisymétriques en fonction des champs. Finalement tout se ramène donc à la résolution des 24 équations (E).

Cette résolution étant assez compliquée, nous l'examinerons avec quelque détail. Pour la mener à bien il est utile d'introduire les notations suivantes :

$$V^{*}_{\mu\nu,\rho} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\lambda}\gamma^{\beta\sigma}V_{\lambda\sigma,\rho}, \qquad (56)$$

$$A_{\rho} = \frac{1}{2}\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta}\varphi_{\mu\nu}V_{\alpha\beta,\rho}, \qquad (57)$$

$$B_{\rho} = \frac{1}{2}\varphi^{\mu\nu}V_{\mu\nu,\rho}. \qquad (58)$$

Nous avons d'autre part

$$\varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}, \qquad \varphi_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\varphi}}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}. \qquad (59)$$

On peut calculer les expressions

$$\gamma^{\alpha\lambda}(\varphi_{\alpha\nu}V_{\rho\lambda,\overline{\mu}} - \varphi_{\alpha\mu}V_{\rho\lambda,\overline{\nu}}), \quad \overline{V}_{\mu\nu\rho} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{V}}_{\mu\nu\rho}$$

qui figurent dans (E) en fonctionde $V_{\mu\nu\rho}$, A_{ρ}, B_{ρ} et Λ'_{ρ}. Après substitution dans (E) et réduction des termes semblables on trouve

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu,\rho} &- \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}V^{*}_{\mu\nu,\rho} + V_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} \\ &+ \gamma^{\alpha\lambda}\gamma^{pq}(\sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha p} - \varphi_{\alpha p}\varphi_{\mu\nu})V_{\rho\lambda q} \\ &+ 2\varphi_{\mu\nu}A_{\rho} + \sqrt{\varphi}\,\gamma^{\alpha\lambda}\gamma^{\sigma\tau}\varphi_{\alpha\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}B_{\tau} \\ &- \left(1 - \frac{r}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right)V_{\mu\nu\rho} \\ &- (\varphi_{\mu\nu}A_{\rho} + \varphi_{\rho\mu}A_{\nu} + \varphi_{\nu\rho}A_{\mu}) \\ &+ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{rs}\gamma^{r\alpha}\gamma^{\sigma\beta}\varphi_{\alpha\beta}V^{*s} \\ &- \gamma^{\alpha\lambda}\big[\sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\Lambda'_{\lambda} \\ &\quad + \varphi_{\lambda\rho}(\varphi_{\mu\nu}\Lambda'_{\alpha} + \varphi_{\alpha\mu}\Lambda'_{\nu} + \varphi_{\nu\alpha}\Lambda'_{\mu})\big] \\ &= I_{\mu\nu\rho} - 2\overset{\circ}{D}_{\rho}\varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \qquad (E')$$

Calculons A_{ρ}, B_{ρ}, $V_{\mu\nu\rho}$ en fonction des quantités connues, c'est-à-dire des champs et de leurs dérivées :

L'équation (A′) s'écrit encore

$$V_{\mu\nu\rho} = I_{\mu\nu\rho}. \qquad (60)$$

D'autre part, la multiplication de (E′) par $\frac{1}{2}\varphi^{pq}$ nous donne

$$A_{\rho} + B_{\rho} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\lambda}\gamma^{pq}\varphi_{\alpha p}V_{\rho\lambda q} = \frac{1}{2}\varphi^{pq}(I_{pq\rho} - 2\overset{\circ}{D}_{\rho}\varphi_{pq}). \qquad (61)$$

Enfin la valeur de B_{ρ} nous est donnée facilement par (A). En multipliant cette équation par $\frac{i}{2}\varphi^{pq}$, on trouve en effet

$$B_{\rho} - 2u_{\rho} = \frac{1}{2}\varphi^{pq}(I_{pq\rho} - 2\overset{\circ}{D}_{\rho}\varphi_{pq}) \qquad (u_{\rho} = u^{\lambda}_{\rho\lambda}), \qquad (62)$$

et, par conséquent, en substituant dans (56),

$$A_{\rho} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\lambda}\gamma^{\mu\nu}\varphi_{\alpha\mu}I_{\lambda\nu\rho} - 2u_{\rho}. \qquad (63)$$

Or on a, d'une part,

$$\frac{1}{2}\varphi^{pq}(I_{pq\rho} - 2\overset{\circ}{D}_{\rho}\varphi_{pq}) = \partial_{\rho}\operatorname{Log}\frac{\gamma}{\varphi} + \frac{1}{2}\varphi^{pq}I_{pq\rho}. \qquad (64)$$

D'autre part,

$$u_{\rho} = \Gamma'_{\rho} - \left\{ {\lambda \atop \rho\lambda} \right\} = \frac{1}{2r}\partial_{\rho}r - \frac{1}{2\gamma}\partial_{\rho}\gamma = \frac{1}{2}\partial_{\rho}\operatorname{Log}\frac{r}{\gamma}. \qquad (65)$$

Il en résulte, d'après (62) et (63),

$$B_{\rho} = \partial_{\rho}\operatorname{Log}\frac{r}{\varphi} + \frac{1}{2}\varphi^{\mu\nu}I_{\mu\nu\rho}, \qquad (66)$$

$$A_{\rho} = -\partial_{\rho}\operatorname{Log}\frac{r}{\gamma} + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\lambda}\gamma^{\mu\nu}\varphi_{\alpha\mu}I_{\lambda\nu\rho}. \qquad (67)$$

Substituons les valeurs (66) et (67) dans (E′). Nous obtenons

$$V_{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} V^{*}_{\mu\nu,\rho} + V_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} = R_{\mu\nu,\rho}, \qquad (\mathcal{E})$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu,\rho} = & -2\dot{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + I_{\mu\nu\rho} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} I^{*}_{(\mu\nu)\rho} \\ & + 2\varphi_{\mu\nu}\partial_\rho \operatorname{Log}\frac{r}{\gamma} + \frac{\varphi}{\sqrt{-\gamma}} \varepsilon^{*}_{(\mu\nu)\rho\lambda}\varphi^{\sigma\lambda}\partial_\sigma \operatorname{Log}\frac{r}{\varphi} \\ & - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi^{*}_{\mu\nu}\partial_\rho \operatorname{Log}\frac{r}{\varphi} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} \varphi^{*}_{\mu\nu}\varphi^{ab} I_{ab\rho} \\ & - \sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\varphi^{\sigma\lambda}\partial_\sigma \operatorname{Log}\frac{r}{\gamma} \\ & \gamma^{\alpha\lambda}\Big[\sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\Lambda'_\lambda \\ & \qquad + \varphi_{\rho\lambda}(\varphi_{\alpha\nu}\Lambda'_\mu + \varphi_{\mu\alpha}\Lambda'_\nu + \varphi_{\nu\mu}\Lambda'_\alpha)\Big]. \end{aligned} \qquad (68)$$

En multipliant par $\gamma^{\mu\rho}$ on obtient

$$I_{\mu\nu\rho} = \sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\lambda\sigma}\partial_\lambda \operatorname{Log}\frac{r}{\varphi}, \qquad (69)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu,\rho} = & -2\dot{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + \sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\varphi^{\lambda\sigma}\partial_\sigma \operatorname{Log}\frac{\varphi}{\gamma} \\ & + 2\varphi_{\mu\nu}\partial_\rho \operatorname{Log}\frac{r}{\gamma} - 2\frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}\varphi^{*}_{\mu\nu}\partial_\rho \operatorname{Log}\frac{r}{\varphi} \\ & + \gamma^{\alpha\lambda}\Big[\sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\Lambda'_\lambda \\ & \qquad + \varphi_{\rho\lambda}(\varphi_{\alpha\nu}\Lambda'_\mu + \varphi_{\mu\alpha}\Lambda'_\nu + \varphi_{\nu\mu}\Lambda'_\alpha)\Big]. \end{aligned} \qquad (70)$$

Nous avons donc, en définitive, à résoudre l'équation $(\mathcal{E})$ dans laquelle $R_{\mu\nu,\rho}$ est une quantité connue. Formons pour cela $\mathcal{E}^{*}_{\mu\nu,\rho}$ et $\mathcal{E}_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}}$, en tenant compte des relations

$$V^{**}_{\mu\nu,\rho} = -V_{\mu\nu,\rho} \qquad (71)$$

et

$$V_{\mu\nu,\overline{\overline{\overline{\rho}}}} = -\frac{\varphi}{\gamma}V_{\mu\nu,\rho} - \frac{1}{\gamma}(r-\gamma-\varphi)V_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}}. \qquad (72)$$

On obtient

$$V^{*}_{\mu\nu,\rho} + \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}V_{\mu\nu,\rho} + V^{*}_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} = R^{*}_{\mu\nu,\rho}, \qquad (\mathcal{E}^{*})$$

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}V^{*}_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} - \frac{\varphi}{\gamma}V_{\mu\nu,\rho} \\ - \frac{1}{\gamma}(r-\gamma-\varphi)V_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}} = R_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}}. \end{aligned} \qquad (\overline{\overline{\mathcal{E}}})$$

En éliminant $V^{*}_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}}$ et $V_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}}$ entre $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{E}^{*})$ et $(\overline{\overline{\mathcal{E}}})$, il vient

$$\begin{aligned} & aV_{\mu\nu,\rho} - bV^{*}_{\mu\nu,\rho} \\ & = \left(2-\frac{r}{\gamma}+\frac{\varphi}{\gamma}\right)R_{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}R^{*}_{\mu\nu,\rho} - R_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}}, \end{aligned} \qquad (\mathcal{E}_1)$$

en posant

$$a = 2 - \frac{r}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma}, \qquad b = \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}\left(3-\frac{r}{\gamma}+\frac{\varphi}{\gamma}\right), \qquad (73)$$

et en formant $a\,\mathcal{E}_1 + b\,\mathcal{E}^{*}_1$ nous obtenons

$$(a^2-b^2)V_{\mu\nu,\rho} = aS_{\mu\nu,\rho} + bS^{*}_{\mu\nu,\rho}, \qquad (74)$$

avec

$$S_{\mu\nu,\rho} = \left(2-\frac{r}{\gamma}+\frac{\varphi}{\gamma}\right)R_{\mu\nu,\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}R^{*}_{\mu\nu,\rho} - R_{\mu\nu,\overline{\overline{\rho}}}, \qquad (75)$$

(74) détermine la partie antisymétrique des coefficients de connexion. La partie symétrique de ces coefficients est donnée par (53), qui s'écrit encore

$$u_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2}(V_{\mu\rho,\overline{\nu}} + V_{\nu\rho,\overline{\mu}}). \qquad (76)$$

Les coefficients de connexion

$$\Lambda'^{\rho}_{\mu\nu} = \gamma^{\rho\lambda}V_{\mu\nu,\lambda} \qquad \text{et} \qquad \Gamma'^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + \gamma^{\rho\lambda}u_{\mu\nu,\lambda}$$

sont donc entièrement déterminés par (68), (74), (75) et (76).

4. **Équations des champs.** — Dans une théorie métrique, le principe variationnel

$$\delta\int d\tau = 0$$

donne *a priori* et quel que soit $\mathfrak{A}$ deux sortes de relations : les unes se déduisent de la varition des coefficients de connexion $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$, les autres de la variation des $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ considérés comme variables indépendantes.

Dans une théorie purement affine, seules les relations dues aux variations des $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ peuvent être obtenues directement et indépendamment de la forme de $\mathfrak{A}$. Les $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ sont des fonctions de $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ définies par (15)

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial U_{\mu\nu}}. \qquad (15)$$

Quelle que soit la forme de $\mathfrak{A}$ cette fonction sera donc du type suivant :

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\mathcal{R}^{\mu\nu}U_{\mu\nu}, \qquad (77)$$

mais seules les variations $\delta U_{\mu\nu}$ sont à considérer. C'est ce que nous avons fait dans ce qui précède. Les variations $\delta\mathcal{R}^{\mu\nu}$ susceptibles de conduire aux équations du champ

$$U_{\mu\nu}(\Delta) = R_{\mu\nu}(\dot{\Delta}) = 0$$

ne se déduisent pas d'un principe variationnel, puisque les $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ ne sont pas des variations indépendantes.

Pour aller plus loin, il faut attribuer à la fonction une forme particulière. Les équations du champ se déduisent alors de la définition (15). Posons, par exemple,

$$\left.\begin{aligned} & \mathfrak{A} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{-\dot{R}} \\ & \big[\dot{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(\dot{\Delta}),\ \dot{R} = R(\dot{\Delta}) = \det R_{\mu\nu}(\dot{\Delta})\big]. \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

(15) s'écrit alors

$$\left.\begin{aligned}\lambda\,\mathcal{R}^{\mu\nu} &= \frac{-1}{\sqrt{-\overset{*}{R}}}\,\frac{\partial \overset{*}{R}}{\partial \overset{*}{R}_{\mu\nu}} = \sqrt{-\overset{*}{R}}\,\overset{*}{R}^{\mu\nu}\\ &\left(\overset{*}{R}\,\overset{*}{R}^{\mu\nu} = \min \overset{*}{R}_{\mu\nu}\right),\end{aligned}\right\}\qquad (79)$$

c'est-à-dire

$$\overset{*}{R}_{\mu\nu} = \lambda\, r_{\mu\nu}. \qquad (80)$$

En posant comme en (20)

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \sqrt{-r}\, r^{\mu\nu}. \qquad (20)$$

Mais nous avons, d'après (9),

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}\left(\overset{*}{\Delta}\right) = U_{\mu\nu}\left(\overset{*}{\Delta}\right) &= \partial_\rho \overset{*}{\Delta}{}^\rho_{\mu\nu}\\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \overset{*}{\Gamma}_\nu + \partial_\nu \overset{*}{\Gamma}_\mu\right) + \overset{*}{\Delta}{}^\lambda_{\mu\nu}\overset{*}{\Gamma}_\lambda - \overset{*}{\Delta}{}^\lambda_{\mu\rho}\overset{*}{\Delta}{}^\rho_{\lambda\nu}\\ &= \partial_\rho \Delta'^\rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \Gamma_\nu + \partial_\nu \Gamma_\mu\right)\\ &\quad + \Delta'^\lambda_{\mu\nu}\Gamma'_\lambda - \Delta'^\lambda_{\mu\rho}\Delta'^\rho_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} r_{\mu\nu}\,\partial_\rho f^{\bar\rho}\\ &\quad + \frac{1}{3}\left(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu\right) - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu f^{\bar{\bar\nu}} - \partial_\nu f^{\bar{\bar\mu}}\right)\\ &\quad + \frac{1}{6}\left(f_\nu - f_{\bar\nu}\right) r_{\mu\lambda} f^\lambda\\ &\quad - \frac{1}{2} r_{\mu\lambda} r_{\nu\sigma}\left(f^\lambda + f^{\bar\lambda}\right)\left(f^\sigma + f^{\bar\sigma}\right) + \frac{1}{2} r_{\mu\nu} f^\lambda \Gamma'_\lambda. \qquad (81)\end{aligned}$$

En scindant en parties symétrique et antisymétrique

$$R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}, \qquad (82)$$

les équations du champ

$$G_{\mu\nu} = \lambda\gamma_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \lambda\varphi_{\mu\nu} \qquad (83)$$

s'écrivent encore

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} = \mathring{G}_{\mu\nu} &+ \mathring{D}_\rho u^\rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(D_\mu u_\nu + D_\nu u_\mu\right)\\ &+ u^\rho_{\mu\nu} u_\rho - u^\lambda_{\mu\rho} u^\rho_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}\Lambda'^\lambda_{\mu\rho}\Lambda'^\rho_{\lambda\nu}\\ &+ \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\mathring{D}_\rho f^{\bar\rho} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} f^{\bar\rho} u_\rho + \frac{1}{2}\left(f_\mu f_\nu + f_\nu f_\mu\right)\\ &\qquad - \frac{1}{3} f_\mu f_\nu - \frac{1}{2} f^{\bar{\bar\mu}} f^{\bar{\bar\nu}} - \frac{1}{6} f_{\bar\mu} f_{\bar\nu} = \lambda\gamma_{\mu\nu}, \qquad (84)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-F_{\mu\nu} = \quad &\frac{1}{2}\mathring{D}_\rho \Lambda'^\rho_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Lambda'^\rho_{\mu\nu} u_\rho\\ &- \frac{1}{2}\left(u^\lambda_{\mu\rho}\Lambda'^\rho_{\lambda\nu} + u^\rho_{\lambda\nu}\Lambda'^\lambda_{\mu\rho}\right) - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu}\mathring{D}_\rho f^{\bar\rho}\\ &- \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu} f^{\bar\rho} u_\rho + \frac{1}{3}\left(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu\right)\\ &\frac{1}{2}\left(\partial_\mu f^{\bar{\bar\nu}} - \partial_\nu f^{\bar{\bar\mu}}\right) + \frac{1}{6}\left(f_\mu f_{\bar\nu} - f_\nu f_{\bar\mu}\right) = -\lambda\varphi_{\mu\nu}, \qquad (85)\end{aligned}$$

en désignant comme précédemment par $\mathring{D}_\rho$ la dérivée covariante écrite avec les symboles $\{\ \}$ et par $\mathring{G}_{\mu\nu}$ le tenseur contracté écrit avec les mêmes symboles

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(\{\ \}) = P_{\mu\nu}(\{\ \}). \qquad (86)$$

Il nous reste à remplacer les coefficients de connexion $u^\rho_{\mu\nu}$ et $\Lambda'^\rho_{\mu\nu}$ par les valeurs obtenues au chapitre précédent.

Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune approximation. Supposons maintenant que les $\varphi_{\mu\nu}$ et leurs dérivées soient des quantités petites ε par rapport à l'unité et convenons de négliger les termes en ε^3. D'après (28) $f^{\mu\nu}$ est de l'ordre de $\varphi_{\mu\nu}$. Un calcul facile montre qu'à l'approximation admise on a simplement

$$\begin{aligned}\mathring{G}_{\mu\nu} &+ \mathring{D}_\rho u^\rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{D}_\mu \mathring{D}_\nu \operatorname{Log} r\\ &- \frac{1}{4}\Lambda'^\lambda_{\mu\rho}\Lambda'^\rho_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\mathring{D}_\rho f^{\bar\rho} - \frac{1}{3} f_\mu f_\nu = \lambda\gamma_{\mu\nu}, \qquad (87)\end{aligned}$$

$$\mathring{D}_\rho \Lambda'^\rho_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\left(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu\right) = -2\lambda\varphi_{\mu\nu}, \qquad (88)$$

avec

$$V_{\mu\nu,\rho} \simeq R_{\mu\nu,\rho} \simeq -2\mathring{D}_\rho \varphi_{\mu\nu} + I_{\mu\nu,\rho}, \qquad (89)$$

$$\begin{aligned}u_{\mu\nu.\rho} \simeq &-\gamma^{pq}\left(\varphi_{\nu p}\mathring{D}_q\varphi_{\mu\lambda} + \varphi_{\mu p}\mathring{D}_q\varphi_{\nu\lambda}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\gamma^{pq}\left(\varphi_{\nu p} I_{\mu\lambda.q} + \varphi_{\mu p} I_{\nu\lambda.q}\right). \qquad (90)\end{aligned}$$

Considérons d'abord l'équation (88). Elle s'écrit encore

$$\begin{aligned}\mathring{\Box}\varphi_{\mu\nu} &+ \gamma^{\rho\lambda}\mathring{G}^p{}_{\rho\mu\nu}\varphi_{p\lambda}\\ &+ \gamma^{pq}\left(\varphi_{\mu p}\mathring{G}_{\nu q} - \varphi_{\nu p}\mathring{G}_{\mu q}\right)\\ &\qquad + \frac{1}{3}\left(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu\right) = 2\lambda\varphi_{\mu\nu}, \qquad (91)\end{aligned}$$

en posant

$$\mathring{\Box}\varphi_{\mu\nu} = \gamma^{\rho\lambda}\mathring{D}_\rho\mathring{D}_\lambda\varphi_{\mu\nu} \qquad (92)$$

et en tenant compte des identités

$$\left.\begin{aligned}\left(\mathring{D}_\rho\mathring{D}_\mu - \mathring{D}_\mu\mathring{D}_\rho\right)\varphi_{\nu\lambda} &= \mathring{G}^p{}_{\nu\rho\mu}\varphi_{p\lambda} + \mathring{G}^p{}_{\lambda\rho\mu}\varphi_{\nu p},\\ \mathring{G}^p{}_{\mu\nu\rho} + \mathring{G}^p{}_{\rho\mu\nu} &+ \mathring{G}^p{}_{\nu\rho\mu} = 0,\end{aligned}\right\}\qquad (93)$$

et de l'approximation

$$\gamma^{\rho p}\mathring{D}_\rho\varphi_{p\mu} \simeq f_\mu. \qquad (94)$$

Mais d'après (87) on peut substituer dans (91) à l'approximation admise

$$\mathring{G}_{\mu\nu} \simeq \lambda\gamma_{\mu\nu}. \qquad (95)$$

et l'on obtient

$$\mathring{\Box}\varphi_{\mu\nu} + \gamma^{\rho\lambda}\mathring{G}^p{}_{\rho\mu\nu}\varphi_{p\lambda} + \frac{1}{3}\left(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu\right) = 0. \qquad (96)$$

En supposant qu'à l'approximation du premier ordre

$$\mathring{G}^p{}_{\rho\mu\nu} = \frac{\lambda}{3}\left(\gamma_{\rho\mu}\delta^p_\nu - \gamma_{\rho\nu}\delta^p_\mu\right), \qquad (97)$$

expression compatible avec (95), on a

$$\mathring{\Box}\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu\right) = \frac{2\lambda}{3}\varphi_{\mu\nu}. \qquad (98)$$

Multiplions (98) par $\gamma^{\mu\rho}\mathring{D}_\rho$. En tenant compte

des identités (93) il vient

$$\overset{\circ}{\Box} f_\rho = \frac{\lambda}{2} f_\rho. \tag{99}$$

Enfin, en appliquant l'opérateur $\overset{\circ}{\Box} = \gamma^{ab} \overset{\circ}{D}_a \overset{\circ}{D}_b$ à (98) on obtient

$$\overset{\circ}{\Box}\left(\overset{\circ}{\Box}\varphi_{\mu\nu} - \frac{2\lambda}{3}\varphi_{\mu\nu}\right) = -\frac{\lambda}{2}\left(\overset{\circ}{\Box}\varphi_{\mu\nu} - \frac{2\lambda}{3}\varphi_{\mu\nu}\right). \tag{100}$$

Posons

$$\psi_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu). \tag{101}$$

D'après (98) et (100), $\psi_{\mu\nu}$ vérifie l'équation de propagation

$$\overset{\circ}{\Box}\psi_{\mu\nu} = -\frac{\lambda}{2}\psi_{\mu\nu}. \tag{102}$$

Ainsi, le champ en rotationnel $\psi_{\mu\nu}$ qui satisfait l'équation de propagation (102) n'a pas une divergence nulle, même à l'approximation admise. En effet, d'après (99) et (101),

$$\gamma^{\rho\lambda}\overset{\circ}{D}_\rho\psi_{\lambda\nu} = \frac{\lambda}{6} f_\nu. \tag{103}$$

Revenons maintenant à l'équation (87). Elle s'écrit encore

$$\overset{\circ}{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{G}\gamma_{\mu\nu} + \lambda\gamma_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu} \qquad (\overset{\circ}{G} = \gamma^{ab}\overset{\circ}{G}_{ab}), \tag{104}$$

avec

$$T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\tau \qquad (\tau = \gamma^{ab}\tau_{ab}), \tag{105}$$

$$\tau_{\mu\nu} = -D_\rho u^\rho_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu D_\nu \operatorname{Log} r$$
$$\frac{1}{4}\Lambda'^{\lambda}_{\mu\rho}\Lambda'^{\rho}_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} D_\rho f^\rho - \frac{1}{3} f_\mu f_\nu. \tag{106}$$

Les équations de la gravitation dans le vide

$$\overset{\circ}{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{G}\gamma_{\mu\nu} + \lambda\gamma_{\mu\nu} = 0$$

sont donc vérifiées au second ordre près. L'influence du champ électromagnétique se traduit par le tenseur du second ordre $T_{\mu\nu}$.

En résumé, les résultats acquis peuvent s'énoncer de la façon suivante :

1° L'équation $r^{\mu\nu}_{+-}; \rho' = 0$ (première équation d'Einstein) résultant de la seule variation des coefficients de connexion affine est conservée même si $f^\mu \neq 0$. Elle permet de déterminer complètement la connexion affine en fonction des $r_{\mu\nu}$ et conduit aux solutions rigoureuses (74) et (76) de notre théorie.

2° L'équation $R_{\mu\nu} = \lambda r_{\mu\nu}$ qui résulte du choix (78) de la fonction d'action se traduit par les équations électromagnétiques (84). Au troisième ordre près, elles se réduisent à (98) et à (104).

3° Une conséquence de $r^{\mu\nu}_{+-}; \rho' = 0$ est

$$\frac{1}{2}\partial_\rho \operatorname{Log} r - \Gamma_\rho = \frac{1}{3} f_\rho.$$

La condition $2\Gamma_\rho = \partial_\rho \operatorname{Log} r$ (équivalente à la condition $w; \rho = 0$ d'Einstein) entraîne l'équation de conservation

$$f^\mu = \frac{1}{\sqrt{-r}}\partial_\rho \mathcal{F}^{\rho\mu} = 0.$$

Postuler cette condition revient à confondre les $\overset{*}{\Delta}{}^\rho_{\mu\nu}$ avec les $\Delta'^\rho_{\mu\nu}$. Au troisième ordre près, le champ $\psi_{\mu\nu}$ disparaît. Le champ $\varphi_{\mu\nu}$ dont la divergence est nulle

$$\gamma^{\rho\lambda} D_\rho \varphi_{\lambda\mu} \simeq f_\mu = 0$$

vérifie l'équation de propagation

$$\overset{\circ}{\Box}\varphi_{\mu\nu} = \frac{2\lambda}{3}\varphi_{\mu\nu}.$$

Par contre si $w; \rho' = 0$ ($w; \rho \neq 0$) le champ $\psi_{\mu\nu}$ en rotationnel apparaît. Il satisfait aux équations de propagation (102) du type habituel, mais sa divergence n'est pas nulle. Il est donc comme le champ $\mathcal{H}^{\mu\nu}$ du type mésonique et sa divergence est liée à la valeur de la constante λ.

4° La condition $\Lambda_\rho = 0$ (quatrième équation d'Einstein) permet d'éliminer complètement de la théorie le champ antisymétrique $\mathcal{H}^{\mu\nu}$ du groupe II. La théorie se rapporte alors uniquement à la densité $\mathcal{R}^{\mu\nu}$. De toutes façons les champs $\mathcal{H}^{\mu\nu}$ et $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ appartiennent à deux groupes séparables dont le premier dépend du quadrivecteur arbitraire Λ_ρ et dont le second suffit à déterminer la connexion affine $\overset{*}{\Delta}$.

5° La densité de courant électrique

$$\mathcal{J}^\sigma = \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} I_{\mu\nu\rho}$$

satisfait l'équation de conservation $\partial_\sigma \mathcal{J}^\sigma = 0$. La densité

$$\mathcal{J}^\sigma = \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\mu\nu\rho},$$

avec

$$J_{\mu\nu\rho} = \overset{\circ}{D}_\mu\psi_{\nu\rho} + \overset{\circ}{D}_\rho\psi_{\mu\nu} + \overset{\circ}{D}_\nu\psi_{\rho\mu} = 0$$

est identiquement nulle.

Manuscrit reçu le 12 juillet 1950.

CALCUL DE L'ERREUR DES MESURES D'IONISATION FAITES AVEC UNE CHAMBRE DÉPOURVUE D'ÉLECTRODES DE GARDE

Par H. TELLEZ-PLASENCIA.
Chargé de Recherches au C. N. R. S.
Laboratoire Central des Services chimiques de l'État.

Sommaire. — Dans une chambre d'ionisation munie d'électrodes de garde, le champ est radial dans toute la zone de mesure, le volume ionisé est aisément défini et la condition de saturation et d'utilisation complète de l'énergie des ions est parfaitement remplie. Mais en absence d'électrodes de garde, le champ n'est pas uniforme et les autres conditions sont imparfaitement satisfaites. La correction nécessaire, analysée dans ce travail, se rattache à l'expression générale de l'énergie utilisée donnée précédemment par l'auteur.

Nous avons établi [1] une formule générale permettant de traduire en valeurs absolues les mesures d'ionisation faites avec une chambre à gaz; et nous avons complété cette théorie par un calcul [2] de l'énergie transformée en photons de fluorescence, et réabsorbée avant de quitter la chambre. Mais dans le cas où l'on emploie une chambre dépourvue d'électrodes de garde, il faut introduire une nouvelle correction. En effet, une partie des électrons, libérés avant d'avoir atteint (ou au delà de) la zone où le champ est radial, sont lancés contre la base du cylindre qui constitue la paroi d'entrée (ou de sortie) de la chambre d'ionisation, et l'atteignent sans avoir épuisé toute leur énergie cinétique. Une fraction de cette énergie est donc perdue pour le travail d'ionisation du gaz, et en conséquence, pour la mesure.

Cette correction a fait l'objet d'un travail important de Walbridge [3] qui présente certains points de contact avec notre théorie; nous reprenons ce travail, en y introduisant quelques modifications et quelques généralisations, pour aboutir à des formules cohérentes avec notre formule générale déjà citée. Les calculs ci-dessous concernent une chambre cylindrique, avec électrode axiale; mais la forme du champ électrique n'intervenant pas dans les résultats, ils peuvent s'appliquer approximativement à une chambre rectangulaire.

Le nombre des photons absorbés dans une tranche de gaz d'épaisseur dx, située à une profondeur x, comptée à partir de la fenêtre d'entrée des rayons dans la chambre, est exprimé par

$$dn = n_0 \tau \, e^{-\mu x} \, dx, \qquad (1)$$

avec

n_0, nombre des photons incidents;
τ, coefficient d'absorption photoélectrique;
μ, coefficient d'absorption globable.

De ce nombre, sont transformés en photoélectrons de premier ordre, pour un niveau quelconque, C, ($C = K, L, \ldots$) [*voir* notation de notre article [1] formule (4)] :

$$dn_1 = dn (PQ)_C \qquad (2)$$

et en photoélectrons de deuxième ordre, ou caractéristiques :

$$dn_2 = dn \, u_{EC} (PQ)_C, \qquad (3)$$

$Q = 1 - \frac{1}{\delta}$ est le complément de l'inverse d'une discontinuité d'absorption; $P = \frac{1}{\delta} = 1 - Q$; et $(PQ)_C$ est le produit des valeurs de P correspondant aux niveaux intérieurs à celui, C que l'on considère, par la valeur de Q propre à ce dernier; u_{EC} est le rendement du niveau C en électrons Auger.

Ces photoélectrons ont un parcours moyen R. Si un photon est absorbé (*fig.* 1) en un point O,

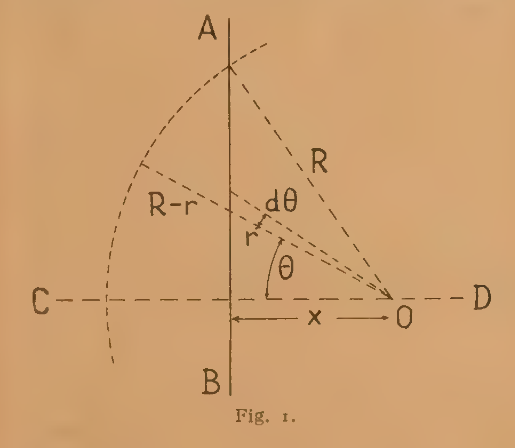


Fig. 1.

situé à la distance x de la paroi AB d'entrée (ou de sortie), de la chambre, et si un photoélectron est émis suivant une direction qui forme un angle θ avec celle CD du rayonnement de Rœntgen, il parcourra une longueur r avant d'atteindre la paroi, qu'il heurtera avec une énergie correspondant au parcours résiduel $R - r$; cette énergie sera transformée en chaleur, et perdue pour les mesures.

La distribution spatiale des électrons, admise par Walbridge, est celle proposée par Auger [4]. Pour les photoélectrons de premier ordre, le nombre

d'électrons compris entre les cônes de demi-ouverture θ et $\theta + d\theta$ est

$$d'n_1 = \frac{2}{\pi} dn_1 \sin^2\theta \, d\theta. \qquad (4)$$

Et pour les électrons Auger :

$$d'n_2 = \frac{1}{2} dn_2 \sin\theta \, d\theta. \qquad (5)$$

En réalité, le champ électrique perturbe ces distributions, qui ne sont exactement valables que près des parois de la chambre, là où le champ est faible vis-à-vis de l'énergie propre des électrons : ce qui, heureusement, est le cas le plus fréquent.

Walbridge admet que le parcours d'un électron est proportionnel au carré de son énergie, sans expliciter le coefficient de proportionnalité. Une loi plus exacte et plus précise a été proposée par Glocker [5] sous la forme suivante :

$$R_g = E^{1,72} . 10^{-5,71}$$

(R_g = masse traversée, en g : cm²).

Inversement, l'énergie d'un électron traversant R_g(g : cm²), sera

$$E = R_g^{0,58} . 10^{3,32}.$$

Le parcours R_l, en centimètres, est inversement proportionnel à la densité ρ du gaz ; or, celle-ci est exprimée, en fonction de sa masse moléculaire M, en grammes (¹), de sa pression p, en atmosphères, et de sa température t, en degrés centigrades, par

$$\rho = \frac{Mp}{22\,384(1+\alpha t)}, \qquad \alpha = \frac{1}{273};$$

donc

$$R_l = E^{1,72} \frac{0,0426(1+\alpha t)}{Mp} \qquad (6)$$

et

$$E = \frac{(R_l Mp)^{0,58} . 6,267}{(1+\alpha t)^{0,58}}. \qquad (6')$$

Le parcours maximum d'un photoélectron, que nous désignerons en général par R, avec les indices R_1 pour ceux de premier ordre et R_2 pour les électrons Auger, sera donné par la formule (6) en y remplaçant E par l'énergie initiale de l'électron.

Pour les photoélectrons de premier ordre, cette énergie est exprimée par la différence entre les énergies du photon incident et du niveau ionisé :

$$h(\nu - \nu_C) = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_C}\right).$$

Elle est donc d'autant plus grande que le niveau est plus extérieur.

Pour les électrons Auger, nous avions admis dans notre travail cité [1], avec Küstner [5], que l'énergie moyenne des électrons Auger est proche de celle de leur niveau final, car si les transitions possibles sont très nombreuses, les plus abondantes sont celles qui ont leur origine dans les niveaux extérieurs, de faible énergie. Walbridge préfère prendre comme énergie moyenne de ces électrons la différence entre celles des raies K_α et du niveau L. En réalité, les erreurs commises en adoptant l'une ou l'autre de ces hypothèses ne sont pas très différentes. Afin de conserver la cohérence avec nos formules, nous continuerons à garder, pour l'énergie des électrons Auger, la valeur adoptée par Küstner :

$$h\nu_C = hc\frac{1}{\lambda_C}.$$

Elle décroît donc avec l'énergie du niveau, et l'on peut négliger les électrons Auger au delà du niveau L.

L'énergie résiduelle des électrons, après le parcours r entre le point d'éjection O et la paroi AB (*fig.* 1) sera exprimée par la formule (6) en y remplaçant R (R_1 ou R_2) par $R - r$. Mais $r = \frac{x}{\cos\theta}$; et si nous faisons $z = \frac{x}{R}$ (donc, $dx = dzR$), nous aurons

$$R - r = R\left(1 - \frac{z}{\cos\theta}\right). \qquad (7)$$

L'énergie correspondant à ce parcours, qui sera perdue pour les mesures, est définie par

$$\Delta E_1 = h(\nu - \nu_C)\left(1 - \frac{z}{\cos\theta}\right)^{0,58}, \qquad (8)$$

pour les photoélectrons de premier ordre ; et par

$$\Delta E_2 = h\nu_C\left(1 - \frac{z}{\cos\theta}\right)^{0,58} \qquad (9)$$

pour les photoélectrons Auger.

L'énergie perdue dans l'élément de segment sphérique de rayon R, de côté $R - r$, et d'ouverture comprise entre θ et $\theta + d\theta$, est donnée par le produit des formules (4) et (8) ou (5) et (9), en y remplaçant dn par sa valeur (1) dans dn_1 (2) pour les photoélectrons de premier ordre et dans dn_2 (3) pour ceux du deuxième ordre, et en faisant $n_0 = \frac{I_0}{h\nu}$, avec I_0 = énergie incidente.

Il faut tenir compte, en outre, du fait que les pertes se produisent aux deux portes, d'entrée et de sortie. Pour la première, l'intensité qui atteint le point situé à la distance x de la paroi est $I_0 e^{-\mu z R}$; pour la deuxième, elle est

$$I_0 \, e^{-\mu(X - zR)} = I_0 \, e^{-\mu X} \, e^{+\mu z R}$$

(avec X = longueur de la chambre).

On obtient alors, comme expression de l'énergie perdue, pour les photoélectrons de premier ordre, entre les angles θ et $\theta + d\theta$:

$$I_1' = \frac{2}{\pi} \frac{I_0}{h\nu} h(\nu - \nu_C)(PQ)c\tau(e^{-\mu z R_1} + e^{-\mu X} e^{+\mu z R_1}) \, dz \, R_1 \times \sin^2\theta \, d\theta \left(1 - \frac{z}{\cos\theta}\right)^{0,58},$$

(¹) Pour les gaz monoatomiques (gaz rares) M est remplacée par A, masse atomique.

Mais

$$\frac{h(\nu - \nu_C)}{h\nu} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_C} = L_C.$$

(notation de notre article [1]).

Alors

$$I_1' = \frac{2}{\pi} I_0 \tau (PQ)_C L_C R_1 (e^{-\mu z R_1} + e^{-\mu X} e^{+\mu z R_1}) x$$
$$\times \sin^2\theta \left(1 - \frac{z}{\cos\theta}\right)^{0,58} dz\, d\theta. \tag{10}$$

Pour les photoélectrons Auger on obtient

$$I_2' = \frac{1}{2} \frac{I_0}{h\nu} u_{EC}\, h\nu_C (PQ)_C \tau (e^{-\mu z R_2} + e^{-\mu X} e^{+\mu z R_2})\, dz\, R_2 x$$
$$\times \sin\theta\, d\theta \left(1 - \frac{z}{\cos\theta}\right)^{0,58}.$$

Mais

$$\frac{h\nu_C}{h\nu} = \frac{\lambda}{\lambda_C} = M_C = 1 - L_C.$$

Donc

$$I_2' = \frac{1}{2} I_0 \tau (PQ)_C u_{EC} M_C R_2 (e^{-\mu z R_2} + e^{-\mu X} e^{+\mu z R_2}) x$$
$$\times \sin\theta \left(1 - \frac{z}{\cos\theta}\right)^{0,58} dz\, d\theta. \tag{11}$$

En intégrant ces deux expressions dans toute la partie de l'espace dans laquelle des électrons peuvent atteindre les parois avec une énergie résiduelle non nulle, c'est-à-dire, entre $z = 0$ et $z = 1$ et entre $\theta = 0$ et $\theta = \text{ang}\cos z$, et en additionnant, niveau par niveau, les intégrales des formules (10 et 11), nous obtenons, pour chaque niveau donné, l'expression de l'énergie perdue.

A cet égard, Walbridge (*loc. cit.*) propose une approximation qui n'est acceptable que dans des conditions limitées : rayonnements très absorbables, gaz très absorbants; elle consiste à faire $zR \cong 0$ à l'entrée de la chambre, et $zR \cong X$ à la sortie. Seulement, dans le cas le plus général, R est proche du rayon de la chambre et n'est pas négligeable vis-à-vis de X; alors, il n'est pas justifié de remplacer l'intégration double, en z et en θ, par une intégration simple, indépendante de z, donc de R.

L'intégration peut être facilitée par une transformation préalable.

Posons

$$\beta = 0,58, \qquad K = \text{exposant de } \sin\theta \text{ (1 ou 2)};$$

$$p = \mu R, \qquad q = e^{-\mu X}, \qquad u = 1 - \frac{z}{\cos\theta}, \qquad \delta = \text{ang}\cos z;$$

$$z = (1 - u)\cos\theta, \qquad \cos\theta = \frac{z}{1 - u}, \qquad \sin\theta\, d\theta = -d(\cos\theta).$$

L'intégrale des expressions (10) et (11) s'écrira pour un niveau C :

$$I_C = I_0 \tau (PQ)_C \left[\frac{2}{\pi} L_C R_1 \int_{z=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\delta} (e^{-p_1 z} + q\, e^{+p_1 z}) \sin^2\theta\, u^\beta\, dz\, d\theta \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} u_{EC} M_C R_2 \int_{z=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\delta} (e^{-p_2 z} + q\, e^{+p_2 z}) \sin\theta\, u^\beta\, dz\, d\theta \right]. \tag{12}$$

Les indices 1 et 2 correspondent toujours, respectivement, aux photoélectrons de premier et de deuxième ordre. Chacune des intégrales doubles peut s'écrire :

$$A = \int_{u=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (e^{-p(1-u)\cos\theta} + q\, e^{+p(1-u)\cos\theta})\, u^\beta \sin^K\theta \cos\theta\, d\theta\, du. \tag{13}$$

La présence de deux termes additifs permet de donner à A la forme

$$A = A' + q\, A''. \tag{14}$$

Et chacun de ces termes peut être résolu par un développement en série :

$$A' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p^n}{(1+\beta)(2+\beta)\ldots(n+1+\beta)}$$
$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} \sin^K\theta\, d\theta, \tag{15}$$

le terme A'' est analogue, mais $(-1)^n$ est remplacé par 1.

Pour $K = 1$, l'intégrale en θ vaut $\frac{1}{n+2}$. Pour $K = 2$, on obtient

$$A' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)(2n+3)}$$
$$\frac{p^{2n}}{(1+\beta)(2+\beta)\ldots(2n+1+\beta)}$$
$$- \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)(2n+2)}$$
$$\times \frac{p^{2n}}{(1+\beta)(2+\beta)\ldots(2n+\beta)}. \tag{16}$$

Le terme A'' est analogue, mais le deuxième terme est positif au lieu de négatif.

Ces séries sont rapidement convergentes lorsque p est petit. Or, dans $p = \mu R$, μ et R varient en sens inverse; comme le montre la formule (6), R varie

comme $E^{1,72}$, E étant une énergie proche de celle du rayonnement incident, pour les photoélectrons de premier ordre, et indépendante de celle-ci mais généralement inférieure, pour les électrons Auger; quant à μ, il varie à peu près comme $\lambda^{2,72}$, c'est-à-dire, comme $E^{-2,72}$. On aura donc $p \simeq \frac{k_1}{E}$ pour les photoélectrons de premier ordre, et $p \simeq \frac{k_2}{E^{2,72}}$ pour les électrons Auger. Le facteur p sera donc toujours petit pour les rayonnements d'énergie moyenne. En somme, le coefficient d'absorption du rayonnement joue un rôle plus important que le parcours des électrons.

En outre, la densité du gaz diminue le parcours des électrons, et augmente dans la même proportion le coefficient d'absorption linéaire. On peut donc calculer $p = \mu R$ en partant des valeurs de μ et de R correspondant aux conditions normales de pression et de température.

Voici les valeurs de p pour un gaz léger (Ne) et pour un autre lourd (Xe), et pour deux longueurs d'onde incidentes, respectivement peu et assez absorbables (²) :

Gaz	Ne.		Xe.	
λ (Å)	0,32	0,79	0,32	0,79
R (cm)	3,36	0,67	0,52	0,10
μ (cm⁻¹) ...	$3,52.10^{-4}$	$3,0.10^{-3}$	0,15	0,32
p	$1,18.10^{-3}$	$2,0.10^{-3}$	$7,8.10^{-2}$	$3,2.10^{-2}$

p est donc toujours petit; et les séries des formules (15) et (16) sont rapidement convergentes.

Revenons maintenant à la formule (12). Nous pouvons l'écrire pour chaque niveau C :

$$I_C = I_0 \tau (PQ)_C \left[\frac{2}{\pi} L_C R_1 (A'_1 + q A''_1) + \frac{1}{2} u_{EC} M_C R_2 (A'_2 + q A''_2) \right]. \quad (17)$$

Faisons

$$U = \frac{2}{\pi} R_1 (A'_1 + q A''_1); \qquad V = \frac{1}{2} R_2 (A'_2 + q A''_2). \quad (18)$$

L'intensité perdue par défaut d'électrodes de garde sera alors, pour un niveau C :

$$I_C = n_0 h\nu\tau (PQ)_C (U_C L_C + V_C u_{EC} M_C). \quad (19)$$

Rappelons que $I_C + M_C = 1$, et que $u_{SC} + u_{EC} = 1$ (u_{SC} étant le rendement en photons de fluorescence, et u_{EC} le rendement en électrons Auger du niveau C); ainsi, l'expression (19) peut être transformée en celle-ci

$$I_C = n_0 h\nu\tau (PQ)_C [(u_C - V_C)(1 - M_C) + V_C (1 - u_{SC} M_C)], \quad (20)$$

dont le deuxième terme est cohérent avec l'expression [*voir* notre article [1], formule (13)] de l'énergie utilisée. On peut donc soustraire ces deux expressions, niveau par niveau. Mais il vaut mieux exprimer l'énergie perdue par défaut d'électrodes de garde pour l'ensemble des niveaux. A cet égard, nous ferons remarquer que pour le niveau L et au delà, $M = \frac{\lambda}{\lambda_C}$ devient très petit, et $u_{SC} = 0$; d'un autre côté, l'énergie absorbée par les niveaux autres que K et L, est exprimée par $\tau P_K P_L$. Alors l'énergie non utilisée pour les photoélectrons émis par ces niveaux sera

$$I_{M,N\ldots} = n_0 h\nu\tau P_K P_L U_{M,N\ldots}.$$

Et l'énergie totale perdue sera

$$I = n_0 h\nu\tau \{ Q_K [(U_K - V_K)(1 - M_K) + V_K (1 - u_{SK} M_K)] + P_K Q_L [(U_L - V_L)(1 - M_L) + V_L (1 - u_{SL} M_L)] + P_K P_L U_{M,L\ldots} \}. \quad (21)$$

L'intégrale $U_{M,N,\ldots}$ qui correspond aux niveaux autres que K et L est calculée avec une valeur de R, parcours des photoélectrons de premier ordre, basée sur une énergie, pour ces électrons, pratiquement égale à celle des photons incidents, car le travail d'arrachement est négligeable.

La formule (21) constitue une correction soustractive; I doit être déduit du travail total d'ionisation, W, calculé d'après la formule (13) de notre travail cité [1]. Dans certains cas (gaz lourds) il faut y ajouter une autre correction additive : le travail d'ionisation supplémentaire fourni par la réabsorption des photons de fluorescence, d'après la formule (20) d'un autre travail [2] de nous.

(²) Pour le Xe, la discontinuité K se trouve entre les deux λ, ce qui explique le faible écart des valeurs de μ.

Manuscrit reçu le 8 juillet 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] TELLEZ-PLASENCIA H. — *J. Physique*, 1948, **9**, 230.
[2] TELLEZ-PLASENCIA H. et THERON P. — *J. Physique*, 1950, **11**, 93.
[3] WALBRIDGE N. L. — *Rev. Scient. Instr.*, 1941, **12**, 546.
[4] AUGER P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1925, **180**, 1939.
[5] GLOCKER R. — *Z. für Naturforsch.*, 1948, **3a**, 147.

LA THERMOMÉCANIQUE DES PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

Par J. E. VERSCHAFFELT.
(La Haye, Pays-Bas).

Sommaire. — Exposé succinct d'une théorie thermomécanique des phénomènes de transport, basée sur l'application du principe de superposition.

1. Introduction. — En Thermomécanique, on donne le nom de *phénomènes de transport* à des processus dans lesquels de l'énergie passe d'un endroit à un autre de l'espace. Ce transport d'énergie peut s'effectuer sans intervention de matière; tel est notamment le cas dans la conduction et le rayonnement calorifiques. Mais généralement il est lié à un déplacement de particules matérielles possédant de l'énergie; à ce second genre de phénomènes de transport appartiennent l'écoulement d'un fluide, la diffusion et le courant électrique.

L'étude thermomécanique de ces phénomènes a fait l'objet de nombreux travaux, ordinairement basés sur les idées d'Onsager (*voir* par exemple ceux de S. R. de Groot, publiés dans ce *Journal* [1]). J'ai développé une théorie indépendante de ces idées dans une série de Notes publiées dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*; elle est basée sur mon principe de superposition, d'après lequel l'énergie dissipée dans un processus irréversible complexe est la somme des énergies dissipées par les processus élémentaires, dans lesquels le phénomène complexe peut être décomposé. Je me propose actuellement d'exposer brièvement cette théorie.

2. Méthode. — Ma méthode est la suivante : à un élément de volume fixe dans l'espace traversé par un fluide en mouvement, un observateur également fixe applique les deux lois fondamentales de la Thermomécanique, la loi de l'énergie et la loi de l'entropie, en exprimant :

1° que l'accroissement de l'énergie totale (énergie interne et énergie macrocinétique) contenue dans l'élément de volume est égal à l'énergie calorifique fournie par l'ambiance, augmentée de l'énergie apportée par les flux matériels et diminuée du travail externe effectué par l'élément de fluide;

2° que l'accroissement de l'entropie est égal à l'entropie venant de l'extérieur, augmentée de l'entropie localement engendrée par les divers processus irréversibles, qui ont leur siège dans l'élément de volume considéré.

Cette entropie d'origine locale, multipliée par la température (absolue), donne l'*énergie dissipée*. Celle-ci s'obtient finalement par élimination de l'énergie calorifique et de l'énergie macrocinétique; cette dernière disparaît au moyen de l'équation dynamique du mouvement.

On obtient ainsi l'énergie dissipée (par unité de volume et de temps) sous forme d'une somme de produits scalaires de deux vecteurs, dont l'un représente une intensité de flux (énergétique ou matériel) et l'autre est ce que j'appelle l'*affinité conjuguée* à ce flux.

Admettant enfin, dans l'état permanent (ou stationnaire), c'est-à-dire lorsque les variables sont indépendantes du temps, une proportionnalité entre les flux et leurs affinités conjuguées, l'énergie dissipée prend la forme d'une somme de termes proportionnels aux carés des intensités de flux, ou des affinités. C'est là l'expression mathématique de mon *principe de superposition*.

3. Affinité thermique. — L'échange d'énergie calorifique se fait par rayonnement ou par conduction. Si l'on représente par q la quantité d'énergie calorifique reçue par rayonnement, par unité de volume et de temps, et par $\mathbf{w}$ l'intensité du flux calorifique de conduction, l'effet calorifique est

$$Q = q - \operatorname{div} \mathbf{w}. \tag{1}$$

Le flux calorifique $\mathbf{w}$ est accompagné d'un flux d'entropie $\frac{\mathbf{w}}{T}$, un flux d'énergie réduite, qui abandonne par unité de volume et de temps une quantité d'entropie $-\operatorname{div}\frac{\mathbf{w}}{T}$. Supposant que l'accroissement d'entropie par rayonnement est simplement $\frac{q}{T}$, sans production d'entropie locale, on formule la loi de l'entropie, dans le cas où le fluide est immobile (ce qui implique que sa concentration, ou densité, c ne change pas), en écrivant

$$T\frac{\partial(cS')}{\partial t} = Q + (\mathbf{w}.\operatorname{grad}\log T) + q'_c, \tag{2}$$

où q'_c est l'énergie dissipée par conduction calorifique. S' est l'entropie spécifique.

Dans ces mêmes conditions la loi de l'énergie donne

$$Q = \frac{\partial(cU')}{\partial t} = \frac{\partial(cW')}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3)$$

Introduisant le potentiel thermique $G' = W' - TS'$ et tenant compte des propriétés de cette fonction, on conclut de (2) et (3) que

$$q'_c = (\mathbf{w}.\mathbf{A}_{th}), \quad (4)$$

où

$$\mathbf{A}_{th} = -\operatorname{grad}\log T \quad (4')$$

est l'*affinité thermique*.

Admettant une proportionnalité entre le flux calorifique et l'affinité thermique (je considère un flux athermique, indépendant d'un gradient de température, admis par certains auteurs, comme une absurdité physique; *voir* à ce sujet [2], § 16) et posant en conséquence

$$\mathbf{w} = k\mathbf{A}_{th}, \quad (5)$$

il vient

$$q' = kA_{th}^2 = \frac{w^2}{k}. \quad (6)$$

Ceci suppose, bien entendu, que la matière est isotrope. En cas d'anisotropie la relation vectorielle (5) doit être remplacée par une relation tensorielle; mais l'expression (4) subsiste.

4. **Écoulement fluidal simple.** — Considérons un fluide simple, coulant à travers un tube dont les parois sont mouillées, de sorte qu'il n'y a pas de frottement au bord. Si $\mathbf{m} = c\mathbf{u}$ est l'intensité de flux, c représentant la masse (gravifique ou molaire) par unité de volume et $\mathbf{u}$ la vitesse d'écoulement, la loi de l'énergie se traduit par [3]

$$\frac{\partial(cU')}{\partial t} + \frac{\partial(cK')}{\partial t} = Q - \operatorname{div}(U'\mathbf{m}) - \operatorname{div}(K'\mathbf{m}) - cL'. \quad (7)$$

Les grandeurs accentuées sont spécifiques, c'est-à-dire relatives à l'unité de masse; ainsi K' est l'énergie macrocinétique par unité de masse $(K' = \frac{1}{2}u^2)$. L' est le travail externe, qui peut s'écrire

$$L' = -(\mathbf{f}'.\mathbf{u}) + \frac{1}{c}\operatorname{div}(p\mathbf{u}) + L'_f, \quad (8)$$

où $\mathbf{f}'$ est la force externe et L'_f le travail contre les forces de frottement.

Introduisant l'enthalpie et tenant compte de l'équation de continuité

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{m}, \quad (9)$$

on peut mettre (7) sous la forme

$$Q = c\frac{dW'}{dt} + c\frac{dK'}{dt} - \frac{dp}{dt} - (\mathbf{f}'.\mathbf{m}) + (\mathbf{u}.\operatorname{grad}p) + cL'_f. \quad (10)$$

Sous forme vectorielle l'équation fondamentale de l'Hydrodynamique s'écrit

$$\mu c\frac{d\mathbf{u}}{dt} = c\mathbf{f}' - \mathbf{Div}\,p_{ij}, \quad (11)$$

où le dernier terme est la divergence vectorielle du tenseur des pressions; le coefficient μ est 1, si les masses sont mesurées avec l'unité gravifique (en grammes), M (poids moléculaire) si elles sont exprimées en moles. Multipliée scalairement par $\mathbf{u}$, cette équation donne

$$\mu c\left(\mathbf{u}.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) = c\frac{dK'}{dt} = (\mathbf{f}'.\mathbf{m}) - \sum_i\sum_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}u_i, \quad (12)$$

ce qui se laisse transformer en

$$\left(\mu\mathbf{m}.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) = c\frac{dK'}{dt} = (\mathbf{f}'.\mathbf{m}) - (\mathbf{u}.\operatorname{grad}p) - cL'_f - \eta\Phi, \quad (12')$$

où η est le coefficient de viscosité et Φ la fonction de dissipation de Rayleigh.

L'élimination de K' entre (10) et (12') donne

$$Q = c\frac{dW'}{dt} - \frac{dp}{dt} + \eta\Phi. \quad (13)$$

L'observateur fixe applique la loi de l'entropie en écrivant

$$\frac{\partial(cS')}{\partial t} = \frac{q}{T} - \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{w}}{T}\right) - \operatorname{div}(S'\mathbf{m}) + \frac{q'}{T}, \quad (14)$$

ou

$$Tc\frac{dS'}{dt} = Q - (\mathbf{w}.\mathbf{A}_{th}) + q'. \quad (14')$$

Eliminant enfin l'effet calorifique entre les deux dernières équations et introduisant le potentiel thermique, on obtient, après réductions,

$$q' = (\mathbf{w}.\mathbf{A}_{th}) + \eta\Phi = q'_c + q'_e, \quad (15)$$

où le second terme est l'énergie dissipée par l'écoulement visqueux.

5. **Affinité d'écoulement.** — En vertu de (12') on a

$$q'_e = (\mathbf{f}'.\mathbf{m}) - \frac{1}{c}(\mathbf{m}.\operatorname{grad}p) - \left(\mu\mathbf{m}.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) - cL'_f. \quad (16)$$

En faisant une moyenne pour toute une section du tube, on fait disparaître le travail de frottement externe [4], et l'on obtient, en représentant par $\bar{\mathbf{u}}$ une vitesse moyenne

$$\bar{q}'_e = (\bar{\mathbf{m}}.\mathbf{A}) = c(\bar{\mathbf{u}}.\mathbf{A}), \quad (17)$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{f}' - \frac{1}{c}\operatorname{grad}p - \mu\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt}. \quad (17')$$

$\mathbf{A}$ est ce que j'appelle l'*affinité d'écoulement fluidal parfait.*

Il s'ensuit que

$$\mu \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} = \mathbf{f}' - \frac{1}{c}\,\mathrm{grad}\,p - \mathbf{A}. \tag{18}$$

où $\mathbf{A}$ est, en définitive, une grandeur thermomécaniquement indéterminée (¹).

D'ailleurs, pour tout filet limité par des lignes de flux on peut écrire

$$q'_e = (\mathbf{m}.\mathbf{A}_e), \tag{19}$$

avec

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A} + \mathbf{A}_g, \tag{19'}$$

où $\mathbf{A}_g$ est ce que j'appelle l'*affinité de glissement*; $\mathbf{A}_e$ est l'*affinité d'écoulement visqueux*. On voit aisément que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Div}\,p_{ij} - \mathrm{grad}\,p. \tag{19''}$$

Admettant que, lorsque l'écoulement se fait en régime permanent, il y a proportionnalité entre l'intensité de flux et l'affinité d'écoulement, on a dans ce cas

$$\bar{\mathbf{m}} = \alpha \mathbf{A} \quad \text{et} \quad q'_e = \alpha A^2 = \frac{m^2}{\alpha}. \tag{20}$$

6. **Hydrostatique**. — L'équilibre du fluide exige évidemment, que l'affinité d'écoulement soit nulle. L'équation (17′) donne donc, la vitesse étant nulle, du reste, comme condition d'équilibre

$$\mathrm{grad}\,p = c\mathbf{f}'. \tag{21}$$

Dans le cas où la pesanteur est la seule force externe agissant sur le fluide on retrouve ainsi la loi générale de Stévin, et, en particulier, pour un gaz, la formule barométrique. Mais, en général, le fluide est encore soumis, selon moi, à l'action d'un champ thermique [5]; tel doit être le cas, à mon avis, lorsque le fluide se trouve dans un tube reliant deux réservoirs, maintenus à des températures différentes. Négligeant la possibilité d'existence d'autres champs de force (champs électrique et magnétique), on aura

$$\mathbf{f}' = \mu(\mathbf{g} + \beta \mathbf{A}_{th}). \tag{22}$$

Dans un tube horizontal on aura ainsi comme condition d'équilibre

$$\mathrm{grad}\,p = -\mu\beta\,\mathrm{grad}\log T. \tag{23}$$

C'est ce que j'appelle l'*effet thermomécanique*. On connaît cet effet sous le nom d'effet Knudsen pour les gaz raréfiés et sous le nom d'effet de fontaine pour l'hélium liquide II. Bien qu'il n'ait pas encore été découvert ailleurs, je suis persuadé que cet effet est général.

7. **Diffusion**. — Considérons maintenant un fluide mixte, mélange de n constituants. Un quelconque de ces constituants, le $\nu^{\text{ième}}$ est animé d'une vitesse de transport propre $\bar{\mathbf{u}}_\nu$, moyenne pour toute une section du tube où s'opère l'écoulement [6]. Posons

$$\bar{\mathbf{u}}_\nu = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}'_\nu, \tag{24}$$

où $\bar{\mathbf{u}}$, déterminé par

$$c\bar{\mathbf{u}} = \sum c_\nu \bar{\mathbf{u}}_\nu \quad \text{ou} \quad \bar{\mathbf{m}} = \sum \bar{\mathbf{m}}_\nu, \tag{24'}$$

est la *vitesse d'écoulement d'ensemble*, et $\mathbf{u}'_\nu$, tel que

$$\sum c_\nu \mathbf{u}'_\nu = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \mathbf{m}'_\nu = 0, \tag{24''}$$

la *vitesse de diffusion* du $\nu^{\text{ième}}$ constituant.

Si les masses sont mesurées en grammes, $\bar{\mathbf{u}}$ est la vitesse barycentrique; si elles sont mesurées en moles, $\bar{\mathbf{u}}$ est la moyenne vitesse molaire. La diffusion étant un phénomène essentiellement moléculaire, il est indiqué, dans l'étude de ce phénomène, de mesurer les masses en moles, et de rendre, par conséquent, la vitesse moyenne molaire nulle, pour obtenir une diffusion pure et simple.

Les vitesses de diffusion étant très faibles, on peut négliger l'énergie macrocinétique et, supposant l'état stationnaire, formuler la première loi en écrivant

$$Q = \sum (\mathbf{m}'_\nu.\mathrm{grad}\,U'_\nu) + L. \tag{25}$$

Le travail L se compose de deux parties, dont l'une

$$L_e = -\sum (\mathbf{f}'_\nu.\mathbf{m}'_\nu) \tag{25 a}$$

est le travail contre les champs de force dans lesquels le fluide se trouve placé, l'autre le travail contre les actions des éléments voisins du fluide. Supposant que ce dernier puisse se mettre sous la forme

$$L_i = \sum \mathrm{div}(j'_\nu \mathbf{m}'_\nu) = \sum (\mathbf{m}'_\nu.\mathrm{grad}\,j'_\nu), \tag{25 b}$$

on aura, en posant $U'_\nu + j'_\nu = W'_\nu$,

$$Q = \sum (\mathbf{m}'_\nu.\mathrm{grad}\,W'_\nu) - \sum (\mathbf{f}'_\nu.\mathbf{m}'_\nu). \tag{26}$$

Il est tout indiqué, d'ailleurs, de voir dans W'_ν l'enthalpie partielle du $\nu^{\text{ième}}$ constituant.

La seconde loi sera traduite par

$$0 = Q - (\mathbf{w}.\mathbf{A}_{th}) - T\sum (\mathbf{m}'_\nu.\mathrm{grad}\,S'_\nu) + q'; \tag{27}$$

ce qui, combiné avec (26), donne, après introduction des potentiels thermiques partiels $G'_\nu = W'_\nu - TS'_\nu$,

$$q' = (\mathbf{w}.\mathbf{A}_{th}) + \sum (\mathbf{f}'_\nu.\mathbf{m}'_\nu) - \sum (\mathbf{m}'_\nu.\mathrm{grad}\,G'_\nu) - \sum S'_\nu (\mathbf{m}'_\nu.\mathrm{grad}\,T).$$

(¹) On remarquera qu'en posant $\mathbf{A} = 0$ on obtient l'équation dynamique du mouvement d'un fluide parfait (équation d'Euler).

Mais

$$\frac{\partial G'_\nu}{\partial T} = - S'_\nu \quad \text{et} \quad \frac{\partial G'_\nu}{\partial p} = v' = \frac{1}{c}, \qquad (28)$$

de sorte qu'on peut écrire, en définitive,

$$q' = (\mathbf{w} \, . \, \mathbf{A}_{\text{th}}) + \sum (\mathbf{m}'_\nu \, . \, \mathbf{A}'_\nu), \qquad (29)$$

avec

$$\mathbf{A}'_\nu = \mathbf{f}'_\nu - \mathbf{f}' - \operatorname{grad}_{Tp} G'_\nu. \qquad (29')$$

$\mathbf{A}'_\nu$ est l'*affinité de diffusion*; $\mathbf{f}'$ est la force externe par mole du mélange (²).

Comme on a, par définition,

$$\sum c_\nu \mathbf{f}'_\nu = c \mathbf{f}', \qquad (30)$$

et qu'en vertu du théorème de Gibbs-Duhem :

$$\sum c_\nu \operatorname{grad}_{Tp} G'_\nu = 0, \qquad (31)$$

il vient

$$\sum c_\nu \mathbf{A}'_\nu = 0. \qquad (32)$$

Si donc on admet que

$$\mathbf{m}'_\nu = a_\nu \mathbf{A}'_\nu = \alpha c_\nu \mathbf{A}'_\nu, \qquad (33)$$

où le coefficient α est supposé être le même pour tous les constituants, la somme des intensités de flux $\mathbf{m}'_\nu$ est nulle, comme il convient [équat. (24″)].

L'énergie dissipée par diffusion est ainsi

$$q'_d = \sum (\mathbf{m}'_\nu \, . \, \mathbf{A}'_\nu) = \sum a_\nu A'^2 = \sum \frac{m'^2_\nu}{a_\nu}. \qquad (34)$$

8. **Équilibre de diffusion.** — Le fluide mixte étant supposé soumis à l'action de trois champs de force, le champ gravifique, un champ électrique et un champ thermique, nous aurons

$$\mathbf{f}'_\nu = M_\nu \mathbf{g} - e_\nu \operatorname{grad} V + M_\nu \beta \mathbf{A}_{\text{th}}; \qquad (35)$$

e_ν est la charge par mole du $\nu^{\text{ième}}$ constituant du fluide partiellement ionisé (pour les particules neutres $e_\nu = 0$).

Si le fluide est neutre dans l'ensemble, ce qui exige que

$$\sum c_\nu e_\nu = 0, \qquad (36)$$

l'équation (30) fournit encore pour $\mathbf{f}'$ l'expression (22), et l'équation (29′) donne

$$\mathbf{A}'_\nu = (M_\nu - M) \mathbf{g} - e_\nu \operatorname{grad} V$$
$$\beta (M_\nu - M) \mathbf{A}_{\text{th}} - \operatorname{grad}_{Tp} G'_\nu. \qquad (37)$$

L'affinité de diffusion est ainsi la somme d'une série de termes proportionnels à des affinités simples (gravifique, électrique, thermique et physicochimique).

L'équilibre de diffusion d'un des constituants du fluide mixte exige, encore une fois, que son affinité conjuguée soit nulle. Cela est possible, évidemment d'une quantité de façons, mais il y a spécialement trois cas d'équlibre intéressants, à savoir ceux où l'affinité physicochimique est maîtrisée par une des trois autres. Remarquant, d'ailleurs, que la supposition déjà faite que le fluide est en repos d'ensemble, exige [6] qu'il soit satisfait à la condition (21), la condition d'équilibre du $\nu^{\text{ième}}$ constituant est, en définitive,

$$M_\nu \mathbf{g} - e_\nu \operatorname{grad} V + \beta M_\nu \mathbf{A}_{\text{th}}$$
$$- \frac{1}{c} \operatorname{grad} p - \operatorname{grad}_{Tp} G'_\nu = 0. \qquad (38)$$

Cette équation peut encore être transformée dans le cas où l'on a affaire à un mélange idéal, pour lequel

$$\operatorname{grad}_{Tp} G'_\nu = RT \operatorname{grad} \log x_\nu, \quad \text{où} \quad x_\nu = \frac{c_\nu}{c} \qquad (39)$$

est le titre du $\nu^{\text{ième}}$ constituant. Ce cas est réalisé par un gaz raréfié ou par une solution diluée. En cas d'absence de phénomènes électriques la condition d'équilibre devient alors

$$M_\nu \mathbf{g} + \beta M_\nu \mathbf{A}_{\text{th}} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} p - RT \operatorname{grad} \log x_\nu = 0. \qquad (40)$$

Cette équation apprend comment, dans une atmosphère isotherme, la composition varie avec le niveau, et aussi comment, dans un tube horizontal, la composition varie avec la température (effet Soret; séparation d'isotopes). D'ailleurs, dans le cas d'un mélange gazeux $x_\nu = \frac{p_\nu}{p}$ et (40) devient

$$M_\nu \mathbf{g} + \beta M_\nu \mathbf{A}_{\text{th}} - RT \operatorname{grad} \log p_\nu = 0. \qquad (41)$$

9. **Thermoélectricité.** — Considérons maintenant un fluide partiellement ionisé, composé de i espèces d'ions ($\nu = 1$ à i) et de n-i espèces de particules neutres ($\nu = i + 1$ à n), que, pour simplifier, nous supposerons soustrait à l'action de la pesanteur [7]. L'expression (37) de l'affinité de diffusion se réduit ainsi à

$$\mathbf{A}'_\nu = - e_\nu \operatorname{grad} V + \beta (M_\nu - M) \mathbf{A}_{\text{th}} - \operatorname{grad}_{Tp} G'_\nu. \qquad (42)$$

A chaque flux ionique correspond un courant électrique avec une intensité

$$\delta_\nu = e_\nu \mathbf{m}'_\nu = \alpha c_\nu e_\nu \mathbf{A}'_\nu, \qquad (43)$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\delta_\nu = \gamma_\nu \mathbf{h}_\nu = \gamma_\nu (\mathbf{h}_{e\nu} + \mathbf{h}_{t\nu}), \qquad (44)$$

où

$$\gamma_\nu = \frac{1}{r_\nu} = \alpha c_\nu e_\nu^2 \qquad (44')$$

est la conductivité du $\nu^{\text{ième}}$ constituant et r_ν sa

(²) On reconnaît dans la formule (29′) la loi d'Archimède : chaque constituant du mélange en équilibre d'ensemble subit une poussée de la part de tout le fluide environnant.

résistivité;

$$\mathbf{h}_{e\nu} = -\operatorname{grad} V + \theta_\nu \mathbf{A}_{\text{th}}, \qquad \text{avec} \quad \theta_\nu = \frac{\beta(M_\nu - M)}{e_\nu} \tag{44 a}$$

est la $\nu^{\text{ième}}$ composante de la force électromotrice externe (je considère, comme on le voit, la force thermoélectrique (deuxième terme) comme une force électromotrice externe) et

$$\mathbf{h}_{i\nu} = -\frac{1}{e_\nu}\operatorname{grad}_{T,p} G'_\nu \tag{44 b}$$

est la composante correspondante de la force électromotrice interne.

Le courant total a l'intensité

$$\delta = \sum \delta_\nu = \gamma(\mathbf{h}_e + \mathbf{h}_i) = \gamma(-\operatorname{grad} V + \theta \mathbf{A}_{\text{th}} + \mathbf{h}_i), \tag{45}$$

où

$$\gamma = \frac{1}{r} = \alpha \sum c_\nu e_\nu^2 = \sum \gamma_\nu = \sum \frac{1}{r_\nu}$$

est la conductivité totale du fluide, Il est clair que pour les particules neutres les notions de force électromotrice, conductivité et résistivité sont illusoires. D'ailleurs, posant

$$z_\nu = r \alpha c_\nu e_\nu^2 \tag{46}$$

(nombre de transport), on a

$$\theta = \sum z_\nu \theta_\nu \qquad \text{et} \qquad \mathbf{h}_i = \sum z_\nu \mathbf{h}_{i\nu}. \tag{47}$$

Quant à l'énergie dissipée par diffusion, on peut l'écrire

$$q'_d = \sum r_\nu \delta_\nu^2 + \sum_{i+1}^{n} (\mathbf{m}'_\nu . \mathbf{A}'_\nu). \tag{48}$$

La première partie de cette expression, qui est la somme des effets Joule des courants individuels (changés de signe), se laisse encore transformer comme suit. On peut poser, notamment,

$$\delta_\nu = z_\nu \delta + e_\nu \Delta_\nu, \tag{49}$$

où

$$\Delta_\nu = \frac{z_\nu}{r e_\nu}\{(\theta_\nu - \theta)\mathbf{A}_{\text{th}} - (\mathbf{h}_{i\nu} - \mathbf{h}_i)\}; \tag{49'}$$

de sorte que

$$\sum e_\nu \Delta_\nu = 0. \tag{50}$$

Il s'ensuit que

$$q'_i = \sum r_\nu \delta_\nu^2 = r\delta^2 + \sum_{1}^{i} \frac{\Delta_\nu^2}{a_\nu}. \tag{51}$$

L'énergie dissipée par les ions est ainsi décomposée en l'effet Joule du courant résultant et un effet de diffusion sans courant électrique.

Les équations se simplifient, lorsqu'on a affaire à une solution diluée d'un électrolyte. Les termes relatifs au solvant, qui reste pratiquement immobile, disparaissent alors, et l'énergie dissipée par diffusion se réduit à q'_i. En outre, l'affinité physicochimique prend la forme (39).

En réduisant le nombre des ions mobiles à un seul, et lui donnant la charge $-\varepsilon$ d'un anion monovalent, on obtient la théorie thermomécanique des électrons, que j'ai développée directement [8].

Nous ne parlerons pas des phénomènes produits par un champ magnétique (*voir* à ce sujet [9]).

10. **Équilibres thermoélectriques.** — L'action d'un champ électrique sur un fluide ionisé donne lieu à des phénomènes d'équilibre intéressants ([10], § 1 à 6)]. Une combinaison convenable d'un champ électrique avec un champ thermique (champ thermoélectrique) peut, en effet, annuler l'affinité (42) conjuguée au flux d'une au moins des espèces d'ions.

Dans le cas d'une solution électrolytique la condition d'équilibre peut s'écrire

$$RT \operatorname{grad} \log c_\nu = -e_\nu(\operatorname{grad} V - \theta_\nu \mathbf{A}_{\text{th}}), \tag{52}$$

ce qui signifie, que dans un champ électrique donné (éventuellement nul) la diffusion d'une espèce d'ions est empêchée par un champ thermique déterminé, et que dans un champ thermique donné elle est empêchée par un champ électrique déterminé; les autres ions diffusent alors, en donnant un courant électrique.

Mais deux espèces d'ions peuvent être en équilibre simultanément dans un même champ thermoélectrique. Tel est le cas, notamment, pour le système des cations et anions d'un électrolyte binaire. C'est ainsi que la diffusion d'une solution saline peut être empêchée par un champ thermoélectrique.

Pour les électrons la condition d'équilibre est exprimée par l'équation

$$\operatorname{grad} V = \theta \mathbf{A}_{\text{th}} + \frac{RT}{\varepsilon} \operatorname{grad} \log c, \tag{53}$$

où le premier terme du second membre est un effet Thomson, le deuxième un effet Volta. Ce dernier existe seul, à température uniforme, au contact de deux métaux différents, ou dans un fil dont la composition varie d'un point à un autre. Si l'on admet que la concentration des électrons libres varie avec la température, un effet Thomson doit toujours être acommpagné d'un effet Volta.

11. **Effets calorifiques.** — La façon la plus simple de trouver une expression analytique pour l'effet calorifique Q, est de partir de l'équation qui traduit la loi de l'entropie et d'y substituer la valeur de q'. C'est ainsi que pour l'écoulement d'un fluide simple l'équation (14) donne, dans l'état stationnaire,

$$\begin{aligned} Q &= T(\mathbf{m} . \operatorname{grad} S') - \eta\Phi \\ &= C'_p(\mathbf{m} . \operatorname{grad} T) + l'_p(\mathbf{m} . \operatorname{grad} p) - \eta\Phi, \end{aligned} \tag{52}$$

où les deux premiers termes sont les effets calorifiques de transformation isobare et isotherme, le dernier

étant l'effet calorifique du frottement interne. Les coefficients C'_p et l'_p sont ce qu'on appelle encore toujours, faute de mieux, une chaleur spécifique et une chaleur latente.

Dans la diffusion pure et simple l'effet calorifique est fourni par (27), qui donne, eu égard à (29) et (34),

$$\begin{aligned} Q &= -\sum \frac{m'_\nu}{a_\nu} + T\sum(\mathbf{m}'_\nu . \operatorname{grad} S'_\nu) \\ &= -\sum \frac{m'^2_\nu}{a_\nu} + T\sum \frac{\partial S'_\nu}{\partial T}(\mathbf{m}'_\nu . \operatorname{grad} T) \\ &\quad + T\sum(\mathbf{m}'_\nu . \operatorname{grad}_{Tp} S'_\nu), \end{aligned} \tag{54}$$

sans terme en grad p, parce que le coefficient

$$\frac{\partial S'_\nu}{\partial p} = -\frac{\partial^2 G'_\nu}{\partial T\, \partial p} = -\frac{\partial v'}{\partial T} \tag{53'}$$

est le même pour tous les constituants.

L'effet calorifique est ainsi décomposé en trois parties, dont la première peut être appelée un effet Joule, la seconde un effet Thomson et la troisième un effet Peltier. Elles correspondent aux trois effets électrocalorifiques observés dans les métaux et ainsi dénommés.

12. **Écoulement fluidal mixte**. — L'application de la méthode à l'écoulement d'un fluide mixte non homogène se heurte à la difficulté, qu'on ne connaît pas d'avance l'équation de mouvement d'un constituant du mélange. On y parvient indirectement en posant l'hypothèse, conforme à mon principe de superposition, que l'énergie dissipée dans ce processus complexe est

$$q' = (\mathbf{w} . \mathbf{A}_{\text{th}}) + (\mathbf{m} . \mathbf{A}) + \sum(\mathbf{m}'_\nu . \mathbf{A}'_\nu), \tag{54}$$

où $\mathbf{A}'_\nu$ est l'affinité de diffusion (29′) et $\mathbf{A}$ l'affinité d'écoulement d'ensemble (17′), sauf qu'il faut y ajouter [5], § 12, un terme provenant du manque de simplicité du fluide; il est vrai que, vu la petitesse des vitesses de diffusion, ce terme additionnel peut être négligé.

D'ailleurs, on vérifie aisément que (54) peut s'écrire

$$q' = (\mathbf{w} . \mathbf{A}_{\text{th}}) + \sum(\mathbf{m}_\nu . \mathbf{A}_\nu), \tag{55}$$

où

$$\mathbf{A}_\nu = \mathbf{A} + \mathbf{A}'_\nu = \mathbf{f}'_\nu - \frac{1}{c}\operatorname{grad} p - \operatorname{grad}_{Tp} G'_\nu - M\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}. \tag{55'}$$

Admettant ici encore une proportionnalité entre les flux et les affinités conjuguées, on obtient

$$q' = kA^2_{\text{th}} + \sum a_\nu A^2_\nu = kA^2_{\text{th}} + aA^2 + \sum a_\nu A'^2_\nu, \tag{56}$$

avec

$$a_\nu = \alpha c_\nu \quad \text{et} \quad a = \alpha c. \tag{56'}$$

13. **Hydrodynamique**. — Quant à l'équation dynamique du $\nu^{\text{ième}}$ constituant, en vertu de la relation approximative [5], équat. (33′),

$$\sum \mu_\nu c_\nu \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_\nu}{\mathrm{d}t} = \mu c \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}, \tag{57}$$

et eu égard à (18) et (19″), elle serait

$$\begin{aligned} \mu_\nu \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_\nu}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{f}'_\nu - \frac{1}{c}\operatorname{grad} p - \mathbf{A} - \mathbf{R}'_\nu \\ &= \mathbf{f}'_\nu - \frac{1}{c}\mathbf{Div}\, p_{ij} - \mathbf{R}'_\nu, \end{aligned} \tag{58}$$

où $\mathbf{R}'_\nu$ est une force de résistance thermomécaniquement indéterminée, telle que

$$\sum c_\nu \mathbf{R}'_\nu = 0. \tag{58'}$$

Manuscrit reçu le 25 octobre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Groot S. R. de. — Sur la thermodynamique de quelques processus irréversibles. I. Corps simples. II. Diffusion thermique et phénomènes connexes. *J. Physique Rad.*, 1947, **8**, 188-191 et 193-200.

[2] Verschaffelt J. E. — Réflexions sur le principe d'Onsager. *Bull. Acad. roy. Belg.*, 1949, **35**, 978-994.

[3] Verschaffelt J. E. — La thermomécanique des fluides réels. *Bull. Acad. roy. Belg.*, 1948, **34**, 344-355.

[4] Verschaffelt J. E. — L'affinité de glissement. *Bull. Acad. roy. Belg.*, 1950, **36**, 290-301.

[5] Verschaffelt J. E. — La thermomécanique des fluides idéaux. *Bull. Acad. roy. Belg.*, 1948, **34**, 325-344.

[6] Verschaffelt J. E. — Sur la thermomécanique des fluides mixtes. *Bull. Acad. roy. Belg.*, 1949, **35**, 847-867.

[7] Verschaffelt J. E. — La thermomécanique des fluides ionisés. *Bull. Acad. roy. Belg.*, 1950, **36**, 690-705.

[8] Verschaffelt J. E. — La thermomécanique de la thermoélectricité. *Bull. Acad. roy. Belg.*, 1950, **36**, 26-46 et 193-206.

[9] Verschaffelt J. E. — Sur la thermomécanique des effets magnétiques transversaux. *Bull. Acad. roy. Belg.*, 1950, **36**, 180-192.

[10] Verschaffelt J. E. — Sur la thermo-électrodiffusion. *Bull. Acad. roy. Belg.*, 1949, **35**, 311-324.

ÉQUATIONS DU CHAMP, ÉQUATIONS DU MOUVEMENT ET FONCTIONS D'ONDE. II. (1)

Par Antonio GIÃO.

Sommaire. — Les propriétés des fluides élémentaires de matière et d'électricité, dont nous avons écrit les équations du mouvement dans la première Partie de ce travail, peuvent être déduites de deux ensembles dénombrables de fonctions d'onde de base, qui sont les fonctions propres des opérateurs laplaciens associés à la métrique interne et externe de l'espace-temps. L'analyse de ces fonctions montre qu'il existe aussi des rayonnements élémentaires caractérisés par des vecteurs courants isotropes et des tenseurs d'énergie-impulsion à trace identiquement nulle. Finalement, la quantification des équations du champ conduit à de nouveaux potentiels gravifiques, nucléaires et électromagnétiques (sans infinités), auxquels correspondent des énergies propres finies pour les particules et champs quantifiés (potentiels de M. L. de Broglie et leur généralisation pour les systèmes de particules).

I. — Fonctions d'onde dans la théorie unitaire.

1. Propriétés générales. — En un point quelconque $P(x^i)$ de l'espace-temps les deux formes quadratiques

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k, \tag{1a}$$

$$\mathrm{d}\Omega^2 = \omega_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k \tag{1b}$$

peuvent être réduites localement à

$$\mathrm{d}s^2 = \sum (\mathrm{d}\rho^i)^2, \tag{2a}$$

$$\mathrm{d}\Omega^2 = \sum (\mathrm{d}q^i)^2 \tag{2b}$$

en utilisant des axes géodésiques locaux et orthogonaux, « internes » (ρ^i) et « externes » (q^i). Aux formes (1) correspondent les opérateurs laplaciens

$$\left.\begin{aligned} \Delta_g &\equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\; g^{ik}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\right), \\ \Delta_\omega &\equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\omega}\;\omega^{ik}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\right), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dont les équations des fonctions et valeurs propres s'écrivent

$$\Delta_g \Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn}, \tag{4a}$$

$$\Delta_\omega \Phi_{mn} = \beta_n \Phi_{mn}. \tag{4b}$$

On peut montrer [I, 2] que $n = 1, 2, \ldots, \infty$ et $m = 1, 2, 3, 4$ quand le domaine d'application de Δ_g et Δ_ω est l'ensemble de l'espace-temps. Les fonctions Ψ_{mn} et Φ_{mn} sont les fonctions d'onde de base de notre théorie unitaire.

Soient ε_0^i ($i = 1, 2, 3, 4$) des matrices de Dirac (ε_0^4 étant ici purement imaginaire). En un point quelconque $P(x^i)$ et pour toute valeur de n le vecteur cliffordien $A_n = \sum_1 a_n^i\,\varepsilon_0^i$, où les a_n^i sont des paramètres linéairement indépendants, définit une rotation du quadripode des ρ^i ou des q^i. Désignons par u_0^i les vecteurs unitaires des axes locaux ρ^i ou q^i dans une certaine orientation ρ_0^i ou q_0^i, et par u_n^i les vecteurs unitaires des mêmes axes dans la position ρ_n^i et q_n^i; les rotations $\rho_0^i \to \rho_n^i$ et $q_0^i \to q_n^i$ seront alors données par $u_n^i = A_n^{-1}\,u_0^i\,A_n$. Posons maintenant

$$\rho_0^k = \rho_n^i f_{g,i}^k(a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4),$$

$$q_0^k = q_n^i f_{\omega,i}^k(a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4)$$

et considérons les équations

$$\sum_{ijk} \varepsilon_0^i f_{g,i}^k(a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4)\,\frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial \rho_0^k} = -\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}, \tag{5a}$$

$$\sum_{ijk} \varepsilon_0^i f_{\omega,i}^k(a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4)\,\frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial q_0^k} = -\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}. \tag{5b}$$

En supposant provisoirement que les $\dfrac{\partial x^j}{\partial \rho_0^k}$ et $\dfrac{\partial x^j}{\partial q_0^k}$ sont des quantités connues, les équations (5a) déterminent des fonctions $a_n^i = (a_g)_n^i(x^j)$ et les équations (5b) des fonctions $a_n^i = (a_\omega)_n^i(x^j)$. En d'autres termes, il existe des valeurs des a_n^i tels que les fonctions d'onde de base satisfont aux systèmes suivants du premier ordre

$$\varepsilon_0^i\,\frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \rho_n^i} = -\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}, \qquad \varepsilon_0^i\,\frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial q_n^i} = -\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}, \tag{6}$$

en tout point de l'espace-temps. Définissons alors des matrices-vecteurs par

$$\varepsilon_n^i = \varepsilon_0^k\,\frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_n^k}, \qquad \varepsilon_{qn}^i = \varepsilon_0^k\,\frac{\partial q^i}{\partial q_n^k}. \tag{7}$$

Grâce à ces matrices, les équations (6) deviennent

$$\varepsilon_n^i\,\frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \rho^i} = -\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}, \qquad \varepsilon_{qn}^i\,\frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial q^i} = -\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}. \tag{8}$$

(1) Suite de *J. Physique Rad.*, 1951, 11, 31-40. Cette première partie du Mémoire sera désignée dans ce qui suit par l'abréviation I.

Soit maintenant η une matrice constante à quatre lignes et quatre colonnes dont les éléments sont des nombres réels quelconques. En posant

$$\Psi^{+}_{mn} = i\Psi_{mn}\eta\varepsilon^4_0 \quad \text{et} \quad \Phi^{+}_{mn} = i\Phi_{mn}\eta\varepsilon^4_0,$$

on déduit de (8) les équations adjointes générales correspondantes

$$\frac{\partial\Psi^{+}_{mn}}{\partial\rho^i}\varepsilon^i_n = \sqrt{\alpha_n}\,\Psi^{+}_{mn}, \qquad \frac{\partial\Phi^{+}_{mn}}{\partial q^i}\varepsilon^i_{qn} = \sqrt{\beta_n}\,\Phi^{+}_{mn}. \tag{9}$$

La matrice η joue un rôle important et sera déterminée plus loin. On doit remarquer que les équations adjointes (9) ne peuvent être écrites que parce que ε^1_0, ε^2_0, ε^3_0 sont réelles et ε^4_0 purement imaginaire. Ces propriétés des ε^i_0 sont d'ailleurs exigées par le caractère hyperbolique normal de l'espace-temps afin de pouvoir écrire les équations (6).

2. **Les fonctions d'onde et les fluides élémentaires.** — Nous allons maintenant déterminer la matrice η de manière à assurer l'existence d'un lien fondamental entre les fonctions d'onde de base et les équations du champ. Considérons les tenseurs symétriques

$$T^{ik}_{(\rho)n} = \frac{1}{2}\chi_0\Psi^{+}_{mn}\left(\varepsilon^i_n\underset{\rightarrow}{\frac{\partial}{\partial\rho_k}} + \varepsilon^k_n\underset{\rightarrow}{\frac{\partial}{\partial\rho_i}} - \underset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial\rho_k}}\varepsilon^i_n - \underset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial\rho_i}}\varepsilon^k_n\right)\Phi^m_n,$$

$$U^{ik}_{(q)n} = \frac{1}{2}\sqrt{\chi_0}\,\Phi^{+}_{mn}\left(\varepsilon^i_{qn}\underset{\rightarrow}{\frac{\partial}{\partial q_k}} + \varepsilon^k_{qn}\underset{\rightarrow}{\frac{\partial}{\partial q_i}} - \underset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial q_k}}\varepsilon^i_{qn} - \underset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial q_i}}\varepsilon^k_{qn}\right)\Phi^m_n,$$

où χ_0^{-1} est l'unité naturelle de longueur (rayon de l'hypersphère de De Sitter la plus proche de l'espace-temps). Ces tenseurs sont conservatifs $\left(\frac{\partial T^{ik}_{(\rho)n}}{\partial\rho^k} = 0;\ \frac{\partial U^{ik}_{(q)n}}{\partial q^k} = 0\right)$ et leurs traces sont données par

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tr}_g\,T^{ik}_{(\rho)n} &= -2\chi_0\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}(i\eta\varepsilon^4_0)\Psi^m_n, \\ \mathrm{tr}_\omega\,U^{ik}_{(q)n} &= -2\sqrt{\chi_0}\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}(i\eta\varepsilon^4_0)\Phi^m_n, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

par suite de (8) et (9). Pour que ces traces soient essentiellement négatives, ainsi que l'exigent les relations [I, (16)] et [I, (20)], il faut évidemment que $\eta = -i\,a\,\varepsilon^4_0$, a désignant ici un nombre positif. Nous devons d'ailleurs poser $a = 1$ afin de faire disparaître de (10) tout coefficient arbitraire. Introduisons cette expression de η dans (10) et considérons les vingt équations

$$\left.\begin{aligned} T_{ik} &= g_{ai}g_{bk}\frac{\partial x^a}{\partial\rho^j_0}\frac{\partial x^b}{\partial\rho^l_0}\sum_n T^{jl}_{(\rho_0)n}, \\ U_{ik} &= \omega_{ai}\omega_{bk}\frac{\partial x^a}{\partial q^j_0}\frac{\partial x^b}{\partial q^l_0}\sum_n U^{jl}_{(q_0)n}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

dont les premiers membres sont les tenseurs T_{ik} et U_{ik} des équations du champ [I, (5), (6)]. Il n'y a que douze équations (11) indépendantes puisqu'elles doivent satisfaire aux huit équations de conservation $(T^{ij}_{\ ;j})_g = 0$ et $(U^{ij}_{\ ;j})_\omega = 0$. Les équations (11) sont donc nécessaires et suffisantes pour déterminer les six paramètres μ^1_g, μ^2_g, ..., μ^6_g qui interviennent dans les dérivées $\frac{\partial x^p}{\partial\rho^j_0}$ et les six paramètres μ^1_ω, ... μ^6_ω qui interviennent dans les dérivées $\frac{\partial x^p}{\partial q^j_0}$. (Ces paramètres fixent l'orientation des quadripodes ρ^i_0 et q^i_0 par rapport aux coordonnées générales x_i). On peut donc exprimer les tenseurs fondamentaux d'énergie-impulsion T_{ik} et U_{ik} des équations du champ [I, (5), (6)] en fonction des fonctions d'onde de base (Ψ_{mn} pour les T_{ik} et Φ_{mn} pour les U_{ik}). Ce résultat montre que les fonctions d'onde de base sont les contenus fondamentaux de l'espace-temps d'où l'on doit pouvoir déduire toutes les propriétés des fluides (et des rayonnements) élémentaires.

Commençons par une revue rapide de quelques propriétés des fluides élémentaires en considérant les vecteurs courants

$$V^i_{g,n} = \Psi_{mn}\varepsilon^i_n\Psi^m_n \quad \text{et} \quad V^i_{\omega,n} = \Phi_{mn}\varepsilon^i_{qn}\Phi^m_n.$$

Ces vecteurs sont conservatifs et essentiellement non isotropes puisqu'ils satisfont aux conditions

$$\sum_i (V^i_{g,n})^2 = (\Psi_{mn}\Psi^m_n)^2 \quad \text{et} \quad \sum_i (V^i_{\omega,n})^2 = (\Phi_{mn}\Phi^m_n)^2.$$

Les vecteurs unitaires $\frac{V^i_{g,n}}{\Psi_{mn}\Psi^m_n}$ et $\frac{V^i_{\omega,n}}{\Phi_{mn}\Phi^m_n}$ et les scalaires $\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\Psi^m_n$ et $\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\Phi^m_n$ permettent d'écrire comme suit les tenseurs T^{ik}_n et U^{ik}_n en coordonnées locales ρ^i et q^i :

$$\begin{aligned} T^{ik}_{(\rho)n} &= -b_g\chi_0\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\Psi^m_n\left(\frac{V^i_{g,n}}{\Psi_{mn}\Psi^m_n}\right)\left(\frac{V^k_{g,n}}{\Psi_{mn}\Psi^m_n}\right) + \theta^{ik}_{g,n} \\ &= \pi_{g,n}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} + \theta^{ik}_{g,n}; \\ U^{ik}_{(q)n} &= -b_\omega\sqrt{\chi_0}\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\Phi^m_n\left(\frac{V^i_{\omega,n}}{\Phi_{mn}\Phi^m_n}\right)\left(\frac{V^k_{\omega,n}}{\Phi_{mn}\Phi^m_n}\right) + \theta^{ik}_{\omega,n} \\ &= \pi_{\omega,n}\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}s} + \theta^{ik}_{\omega,n}, \end{aligned}$$

où b_g et b_ω désignent des coefficients numériques $\geqq 2$. On a donc les relations

$$\pi_{g,n} = -b_g\chi_0\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\Psi^m_n,$$
$$\pi_{\omega,n} = -b_\omega\xi\sqrt{\chi_0}\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\Phi^m_n,$$

avec $\xi = \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\Omega^2}$. Les fluides élémentaires de matière et d'électricité (dont les tenseurs de densité d'énergie-impulsion sont T^{ik} et U^{ik}) peuvent être considérés, d'après les résultats précédents, comme un mélange d'un ensemble dénombrable de fluides élémentaires partiels de matière et d'électricité caractérisés par les tenseurs de densité d'énergie-

impulsion T_n^{ik} et U_n^{ik} pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$. On sait [I, 3] que $n = 1$ correspond à l'électron normal, tandis que $n \geq 2$ correspond aux microélectrons dont la charge e_n et la masse propre $(m_0)_n$ sont données en fonction de la charge e et de la masse propre $(m_0)_e$ de l'électron normal par les relations $e_n = \frac{e}{n^5}$ et $(m_0)_n = \frac{(m_0)_e}{n^5}$. Ces relations correspondent d'ailleurs à la propriété des fonctions d'onde de base Ψ_{mn} et Φ_{mn} de tendre vers zéro comme n^{-3}, tandis que les valeurs propres α_n et β_n tendent vers l'infini comme n^2. Les fonctions $\sqrt{\alpha_n}\Psi_{mn}\Psi_n^m$ et $\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\Phi_n^m$, qui sont respectivement proportionnelles aux densités de masse propre et de charge, tendent donc vers zéro comme n^{-5}.

Considérons l'un des fluides élémentaires partiels T_n ou U_n dont la densité d'énergie-impulsion est donnée par

$$T_n^{ik} = -\,b_g\chi_0\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\Psi_n^m\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} + \Theta_{g,n}^{ik},$$

$$U_n^{ik} = -\,b_\omega\xi\sqrt{\chi_0}\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\Phi_n^m\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} + \Theta_{\omega,n}^{ik}.$$

En prenant les traces on obtient, par suite de (10)

$$\mathrm{tr}_g\Theta_{g,n}^{ik} = (b_g - 2)\chi_0\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\Psi_n^m,$$

$$\mathrm{tr}_g\Theta_{\omega,n}^{ik} = (b_\omega - 2)\xi\sqrt{\chi_0}\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\Phi_n^m.$$

Pour déduire les équations d'état (thermodynamique) des fluides élémentaires partiels, supposons qu'ils peuvent être considérés comme dénués de frottement interne (efforts tangentiels) dans un certain domaine de l'espace-temps. En appliquant les équations [I, (20)] on obtient alors

$$\left.\begin{aligned}\mu_{g,n} &= \frac{c^2}{8\pi K_g}\left(\frac{3b_g+2}{4}\right)\chi_0\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\Psi_n^m,\\ \mu_{\omega,n} &= \frac{c^2}{8\pi K_\omega}\left(\frac{3b_\omega+2}{4}\right)\xi\sqrt{\chi_0}\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\Phi_n^m\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

et

$$\left.\begin{aligned}p_{g,n} &= \frac{c^4}{8\pi K_g}\left(\frac{b_g-2}{4}\right)\chi_0\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\Psi_n^m,\\ p_{\omega,n} &= \frac{c^4}{8\pi K_\omega}\left(\frac{b_\omega-2}{4}\right)\xi\sqrt{\chi_0}\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\Phi_n^m.\end{aligned}\right\} \quad (12a)$$

Ces relations montrent que les fluides élémentaires partiels peuvent être considérés comme barotropes partout où ils sont dénués de frottement interne. Supposons de plus que les fluides partiels sont des gaz parfaits satisfaisant à des équations d'état de la forme habituelle $p_n = R\mu_n\tau_n$, où R désigne la constante de ces gaz et τ_n la température. Par suite de (12), (12a) on voit que dans ces conditions les fluides partiels sont isothermes, la température étant donnée par

$$\tau = \frac{b-2}{3b+2}\,\frac{1}{Rc^2}.$$

Grâce aux résultats précédents on peut écrire comme suit la densité d'énergie-impulsion des fluides partiels

$$T_n^{ik} = -\chi_0\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\Psi_n^m\left(b_g\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} - \frac{b_g-2}{4}g^{ik}\right),$$

$$U_n^{ik} = -\xi\sqrt{\chi_0}\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\Phi_n^m\left(b_\omega\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} - \frac{b_\omega-2}{4}g^{ik}\right)$$

et les équations correspondantes du mouvement (équations densitaires) seront

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2} + \left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}_g\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{b_g-2}{4b_g}\right)g^{ik}\frac{\partial(\log\Psi_{mn}\Psi_n^m)}{\partial x^k},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2} + \left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}_\omega\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{b_\omega-2}{4b_\omega}\right)\left[g^{ik}\frac{\partial\log(\xi\Phi_{mn}\Phi_n^m)}{\partial x^k} + (g^{ij}_{,j})_\omega\right].$$

Quand les fluides élémentaires sont dénués de frottement interne, la masse propre et la charge électrique d'une particule sont données par

$$(m_0)_n = \frac{c^2}{32\pi K_g}(3b_g+2)\chi_0\sqrt{\alpha_n}\int_{\tau_g}\Psi_{mn}\Psi_n^m\,\mathrm{d}\tau,$$

$$e_n = \frac{c^2}{32\pi K_\omega}(3b_\omega+2)\xi\sqrt{\chi_0}\sqrt{\beta_n}\int_{\tau_\omega}\Phi_{mn}\Phi_n^m\,\mathrm{d}\tau.$$

De plus, par suite de [I, (20)] on aura

$$\mathfrak{m}_{g,n} = -\frac{32\pi K_g}{c^2}\left(\frac{b_g}{3b_g+2}\right)(m_0)_n,$$

$$\mathfrak{m}_{\omega,n} = -\frac{32\pi K_\omega}{c^2}\left(\frac{b_\omega}{3b_\omega+2}\right)e_n$$

et

$$\widetilde{\Theta_{g,n}^{ik}} = \frac{8\pi K_g}{c^2}\left(\frac{b_g-2}{3b_g+2}\right)\int_{(m_0)_n} g^{ik}\,\delta(m_0)_n,$$

$$\widetilde{\Theta_{\omega,n}^{ik}} = \frac{8\pi K_\omega}{c^2}\left(\frac{b_\omega-2}{3b_\omega+2}\right)\int_{e_n} g^{ik}\,\delta e_n.$$

Ces valeurs de $\mathfrak{m}_{g,n}$, $\mathfrak{m}_{\omega,n}$, $\widetilde{\Theta_{g,n}^{ik}}$ et $\widetilde{\Theta_{\omega,n}^{ik}}$, introduites dans les équations [I, (33)] donnent les équations du mouvement des particules finies quand on peut négliger le frottement interne dans les fluides élémentaires.

3. **Les fonctions d'onde et les rayonnements élémentaires.** — Au lieu de poser la relation $\eta = -i\varepsilon_0^4$ caractéristique des fluides élémentaires, posons maintenant simplement $\eta = I_4$, I_4 étant la matrice unité à quatre lignes et quatre colonnes. Les vecteurs courants conservatifs correspondants s'écrivent maintenant

$$\overset{*}{V}{}^i_{g,n} = i\Psi_{mn}\varepsilon_0^4\varepsilon_n^i\Psi_n^m, \qquad \overset{*}{V}{}^i_{\omega,n} = i\Phi_{mn}\varepsilon_0^4\varepsilon_{\eta n}^i\Phi_n^m.$$

Ces vecteurs d'espace-temps jouissent de l'importante propriété

$$\sum\left(\overset{*}{V}{}^i_{g,n}\right)^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum\left(\overset{*}{V}{}^i_{\omega,n}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire ils sont *isotropes*. Les tenseurs conser-

vatifs de densité d'énergie-impulsion qui correspondent à ces vecteurs courants sont les suivants :

$$\left.\begin{aligned}\overset{*}{T}{}^{ik}_{\rho(n)} &= \frac{1}{2}\chi_0 i \Psi_{mn}\varepsilon_0^4\Big(\varepsilon^i_n \underset{\longrightarrow}{\frac{\partial}{\partial\rho^k}} + \varepsilon^k_n \underset{\longrightarrow}{\frac{\partial}{\partial\rho^i}} \\ &\qquad - \underset{\longleftarrow}{\frac{\partial}{\partial\rho^k}}\varepsilon^i_n - \underset{\longleftarrow}{\frac{\partial}{\partial\rho^i}}\varepsilon^k_n\Big)\Psi^m_n, \\ \overset{*}{U}{}^{ik}_{q(n)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\chi_0}\, i\Phi_{mn}\varepsilon_0^4\Big(\varepsilon^i_{qn}\underset{\longrightarrow}{\frac{\partial}{\partial q^k}} + \varepsilon^k_{qn}\underset{\longrightarrow}{\frac{\partial}{\partial q^i}} \\ &\qquad - \underset{\longleftarrow}{\frac{\partial}{\partial q^k}}\varepsilon^i_{qn} - \underset{\longleftarrow}{\frac{\partial}{\partial q^i}}\varepsilon^k_{qn}\Big)\Phi^m_n.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Leur trace est identiquement nulle par suite de (10) et $\eta = I_4$. Ces deux propriétés : vecteurs courants isotropes et énergie-impulsion à trace identiquement nulle sont, selon nous, caractéristiques du *rayonnement pur*. Toutes les fonctions formées, pour $\eta = I_4$, avec les Ψ_{mn} sont donc des propriétés du rayonnement gravifique pur, tandis que les fonctions correspondantes formées avec les Φ_{mn} sont des propriétés du rayonnement électromagnétique pur. Ces rayonnements sont décrits par les tenseurs antisymétriques

$$\overset{*}{F}{}^{ik}_{g,n} = \frac{i}{2}\Psi_{mn}\varepsilon_0^4(\varepsilon^i_n\varepsilon^k_n + \varepsilon^k_n\varepsilon^i_n)\Psi^m_n,$$

$$\overset{*}{F}{}^{ik}_{\omega,n} = \frac{i}{2}\Phi_{mn}\varepsilon_0^4(\varepsilon^i_{qn}\varepsilon^k_{qn} + \varepsilon^k_{qn}\varepsilon^i_{qn})\Phi^m_n,$$

qui satisfont, comme on sait, aux systèmes maxwelliens généralisés

$$\frac{\partial \overset{*}{F}{}^{ik}_{g,n}}{\partial\rho^k} = -2\big(i\sqrt{\alpha_n}\,\overset{*}{V}{}^i_{g,n} + \overset{*}{P}{}^i_{g,n}\big),$$

$$\frac{\partial \overset{*}{F}{}^{ij}_{g,n}}{\partial\rho_k} + \frac{\partial \overset{*}{F}{}^{jk}_{g,n}}{\partial\rho_i} + \frac{\partial \overset{*}{F}{}^{ki}_{g,n}}{\partial\rho_j} = \overset{*}{B}{}^{ijk}_{g,n},$$

$$\frac{\partial \overset{*}{F}{}^{ik}_{\omega,n}}{\partial q^k} = -2\big(i\sqrt{\beta_n}\,\overset{*}{V}{}^i_{\omega,n} + \overset{*}{P}{}^i_{\omega,n}\big);$$

$$\frac{\partial \overset{*}{F}{}^{ij}_{\omega,n}}{\partial q_k} + \frac{\partial \overset{*}{F}{}^{jk}_{\omega,n}}{\partial q_i} + \frac{\partial \overset{*}{F}{}^{ki}_{\omega,n}}{\partial q_j} = \overset{*}{B}{}^{ijk}_{\omega,n};$$

$\overset{*}{P}{}^i_n$ désignant les vecteurs de polarisation

$$\overset{*}{P}{}^i_{g,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi_{mn}}{\partial\rho_i}\varepsilon_0^4\Psi^m_n - \Psi_{mn}\varepsilon_0^4\frac{\partial\Psi^m_n}{\partial\rho_i}\right),$$

$$\overset{*}{P}{}^i_{\omega,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial q_i}\varepsilon_0^4\Phi^m_n - \Phi_{mn}\varepsilon_0^4\frac{\partial\Phi^m_n}{\partial q_i}\right).$$

Les $\overset{*}{F}{}^{ik}_{g,n}$ et $\overset{*}{F}{}^{ik}_{\omega,n}$ satisfont à des conditions importantes que nous considérons aussi comme caractéristiques du rayonnement pur et qui s'écrivent

$$\overset{*}{F}{}^{23}_n\overset{*}{F}{}^{14}_n + \overset{*}{F}{}^{31}_n\overset{*}{F}{}^{24}_n + \overset{*}{F}{}^{12}_n\overset{*}{F}{}^{34}_n = 0,$$

$$\frac{1}{2}\overset{*}{F}_{n,jl}\overset{*}{F}{}^{jl}_n + \overset{*}{F}_{n,4j}\overset{*}{F}{}^{4j}_n = 0,$$

les indices j, l prenant les valeurs 1, 2, 3. On peut d'ailleurs former avec les $\overset{*}{F}{}^{ik}_n$ des tenseurs maxwelliens conservatifs qui sont susceptibles d'être comparés localement et intégralement aux tenseurs (13).

IV. — Quantification des champs métriques.

4. **Formules générales pour un système de particules.** — Le problème de l'interaction particules-champs et l'importante question connexe de l'énergie propre des particules ont été renouvelés par les récentes recherches de M. L. de Broglie [1]. Nous allons montrer que la quantification de nos équations du champ [I, (5), (6)] permet de déduire les nouveaux potentiels de M. de Broglie et de préciser les propriétés des particules quantifiées (ponctuelles) et des forces électromagnétiques et nucléaires [5].

Soient $\nu (= 1, 2, \ldots, n)$ l'indice de numérotage des particules (non nécessairement identiques) d'un système et x^i_ν le référentiel par rapport auquel le mouvement *moyen* de la particule ν est nul. Nous admettrons que les états quantiques de la particule peuvent appartenir à trois classes différentes :

1° celle où les transitions entre états s'accompagnent toujours de l'émission ou de l'absorption de rayonnement (gravifique et électromagnétique) par la particule;

2° celle où les transitions correspondantes ne s'accompagnent pas de rayonnement;

3° finalement, celle où les transitions entre états correspondent aux interactions élémentaires entre la particule et les autres particules du système.

Désignons comme toujours par T_{ik} et U_{ik} les tenseurs de densité d'énergie-impulsion matérielle et électrique, par g_{ik} et ω_{ik} les tenseurs métriques interne et externe et posons

$$T = g^{ik}T_{ik} \quad \text{et} \quad U = \omega^{ik}U_{ik} \quad (\text{avec } \omega^{il}\omega_{lk} = \delta^i_k).$$

Nous associons maintenant la quantification des champs métriques de chaque particule du système à la quantification de son énergie-impulsion par les relations

$$T^{(lm)}_{ik,\nu} = \frac{1}{4}T^{(l)}_\nu g^{(lm)}_{ik,\nu}, \qquad (14a)$$

$$U^{(lm)}_{ik} = \frac{1}{4}U^{(l)}_\nu \omega^{(lm)}_{ik,\nu}, \qquad (14b)$$

avec $l = 1$ pour la classe des états quantiques sans transitions de rayonnement, $l = 2$ pour la classe avec transitions de rayonnement, et $l = 3$ pour la classe des états d'interaction de la particule avec les autres particules. Le symbole m désigne ici l'ensemble des nombres quantiques qui caractérisent l'état de la particule indépendamment de l'appartenance de cet état à l'une quelconque des classes

définies ci-dessus. Les relations (14*a*) et (14*b*) expriment l'hypothèse fondamentale de notre méthode de quantification des champs métriques.

Considérons maintenant les équations du champ [I, (5), (6)] et appliquons-les à des champs faibles. Elles prennent alors la forme

$$\left.\begin{aligned} \square g_{ik} &= \frac{16\pi K_g}{c^2}\left(T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik}\right) - \lambda_g g_{ik}, \\ \square \omega_{ik} &= -\chi_0\left[\frac{16\pi K_\omega}{c^2}\left(U_{ik} - \frac{1}{2} U \omega_{ik}\right) - \lambda_\omega \omega_{ik}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

où $\square$ est le dalembertien, les autres symboles ayant la même signification que dans les paragraphes précédents. En tenant compte des relations (14*a*) et (14*b*) les équations précédentes donnent donc

$$\left.\begin{aligned} \square g_{ik,\nu}^{(lm)} &= \left(\frac{4\pi k_g}{c^2} T_\nu^{(l)} - \lambda_g\right) g_{ik,\nu}^{(lm)}, \\ \square \omega_{ik,\nu}^{(lm)} &= \chi_0\left(\frac{4\pi k_\omega}{c^2} U_\nu^{(l)} - \lambda_\omega\right) \omega_{ik,\nu}^{(lm)}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Nous poserons

$$\xi_\nu^l = \frac{4\pi k_g}{c^2} T_\nu^{(l)} - \lambda_g, \qquad \eta_\nu^l = \chi_0\left(\frac{4\pi k_\omega}{c^2} U_\nu^{(l)} - \lambda_\omega\right). \quad (17)$$

Remarquons maintenant que dans le référentiel x_ν^l les champs propres de la particule ont évidemment une symétrie sphérique et sont statiques. Nous sommes donc conduits à chercher, dans x_ν^l, des solutions des équations (16) de la forme

$$g_{ik,\nu}^{(lm)} = a_g\left[\vec{\sigma}_{i\nu}^{(lm)} \times \nabla_i \varphi_g^{(l)}(r_\nu)\right]_k + [b_{g\,ik}^{(lm)}]_\nu f_g^{(l)}(r_\nu),$$

$$\omega_{ik,\nu}^{(lm)} = a_\omega\left[\vec{\sigma}_{i\nu}^{(lm)} \times \nabla_i \varphi_\omega^{(l)}(r_\nu)\right]_k + [b_{(\omega)\,ik}^{(lm)}]_\nu f_\omega^{(l)}(r_\nu),$$

r_ν étant, dans x_ν^l, la distance spatiale à la particule ν; $[b_{g\,ik}^{(lm)}]_\nu$ et $[b_{\omega\,ik}^{(lm)}]_\nu$ des quantités constantes dans x_ν^l et $\vec{\sigma}_{i\nu}^{(lm)}$ la projection du quadrivecteur spin de la particule ν dans l'état quantique (l, m) sur l'élément d'hyperplan normal à l'axe local des x_ν^l. Les équations (16) donnent alors

$$\left.\begin{aligned} g_{ik,\nu}^{(lm)} &= a_g\left[\vec{\sigma}_{i\nu}^{(lm)} \times \nabla_i\left(\frac{e^{-\xi_\nu^l r_\nu}}{r_\nu}\right)\right]_k \\ &\quad + [b_{g\,(ik)}^{(lm)}]_\nu \frac{e^{-\xi_\nu^l r_\nu}}{r_\nu} + (\beta_{g\nu}^{(lm)})_{ik}\,\delta_{3l}, \\ \omega_{ik,\nu}^{(lm)} &= a_\omega\left[\vec{\sigma}_{i\nu}^{(lm)} \times \nabla_i\left(\frac{e^{-\eta_\nu^l r_\nu}}{r_\nu}\right)\right] \\ &\quad + [b_{(\omega)\,ik}^{(lm)}]_\nu \frac{e^{-\eta_\nu^l r_\nu}}{r_\nu} + (\beta_{\omega\nu}^{(lm)})_{ik}\,\delta_{3l}\,\chi_0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

les constantes $(\beta_{g\nu}^{(lm)})_{ik}$ et $(\beta_{\omega\nu}^{(lm)})_{ik}$ interviennent dans ces solutions parce que nous supposons que $\xi_\nu^3 = \eta_\nu^3 = 0$ pour les raisons indiquées plus loin.

Soit P_ν une propriété quelconque de la particule ν. La moyenne quantique $< P_\nu >$ de cette propriété est définie par

$$< P_\nu > = \sum_{l=1}^{3} \sum_m (c_{lm}^2)_\nu P_\nu^{(lm)},$$

les $(c_{lm}^2)_\nu$ étant les probabilités des différents états. Les moyennes quantiques $< g_{ik,\nu} >$ et $< \omega_{ik,\nu} >$ des champs métriques de la particule ν doivent rester finies pour $r_\nu \to 0$. D'autre part,

$$\sum_m (c_{lm}^2)_\nu \vec{\sigma}_\nu^{(lm)} = 0$$

puisque toutes les orientations du spin sont également probables dans x_ν^l, où aucune force extérieure ne sollicite la particule. Il faut enfin tenir compte de la création et annihilation de particules et nous désignerons par C_n^2 la probabilité que le système soit formé de n particules et par N l'entier tel que $C_{N+s}^2 = 0$ pour s entier positif quelconque. Des expressions (18) on déduit alors facilement les champs métriques du système dans un référentiel quelconque x^i. En posant $(\alpha_i^p)_\nu \equiv \dfrac{\partial x_\nu^p}{\partial x^i}$ on obtient sans difficulté

$$\left.\begin{aligned} < g_{ik} > &= \sum_0^N C_n^2 \sum_{\nu=0}^{n} (\alpha_i^p)_\nu (\alpha_k^q)_\nu \\ &\quad \times \left\{\frac{1}{r_\nu} \sum_{l=1}^{3} \sum_m (c_{lm}^2)_\nu [b_{g\,pq}^{(lm)}]_\nu e^{-\xi_\nu^l r_\nu} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_m (c_{3m}^2)_\nu (\beta_{g\nu}^{(lm)})_{pq}\right\}, \\ < \omega_{ik} > &= \sum_0^N C_n^2 \sum_{\nu=0}^{n} (\alpha_i^p)_\nu (\alpha_k^q)_\nu \\ &\quad \times \left\{\frac{1}{r_\nu} \sum_{l=1}^{3} \sum_m (c_{lm}^2)_\nu [b_{(\omega)\,pq}^{(lm)}]_\nu e^{-\eta_\nu^l r_\nu} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_m (c_{3m}^2)_\nu (\beta_{\omega\nu}^{(lm)})_{pq}\,\chi_0\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

avec les conditions évidentes

$$\sum_{l=1}^{3} \sum_m (c_{lm}^2)_\nu [b_{(g)\,pq}^{(lm)}]_\nu = 0, \quad (20a)$$

$$\sum_{l=1}^{3} \sum_m (c_{lm}^2)_\nu [b_{(\omega)\,pq}^{(lm)}]_\nu = 0 \quad (20b)$$

qui sont nécessaires et suffisantes pour que $< g_{ik} >$ et $< \omega_{ik} >$ restent finis pour $r_\nu \to 0$. Si, dans un x donné, on a les conditions habituelles $< g_{ik} > \to \delta_{ik}$ et $< \omega_{ik} > \to \chi_0 \delta_{ik}$ pour $r \to \infty$, alors

$$\sum_0^N C_n^2 \sum_{\nu=0}^{n} (\alpha_i^p)_\nu (\alpha_k^q)_\nu \sum_m (c_{3m}^2)_\nu (\beta_\nu^{3m})_{pq} = \delta_{ik}.$$

Les champs gravifique, nucléaire et électromagnétique du système s'obtiennent immédiatement à partir de ces expressions (19). En effet, le champ gravifique est donné par $-\frac{1}{2}\nabla g_{44}$ et en retranchant la gravitation proprement dite du champ dont dérivent les forces qui agissent sur les particules neutres on obtient le champ nucléaire N_{ik} dont l'expression, d'après notre théorie unitaire, est la suivante :

$$N_{ik} = \frac{\partial\gamma_{4i}}{\partial x^k} - \frac{\partial\gamma_{4k}}{\partial x^i} - \left(\delta_{4i}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x^k} - \delta_{4k}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x^i}\right), \qquad (21)$$

avec ici

$$\gamma_{44} = \frac{\langle g_{44}\rangle}{2}, \qquad \gamma_{4j} = \langle g_{4j}\rangle \qquad (j = 1, 2, 3).$$

D'autre part, le champ électromagnétique F est donné par l'expression [I, (41)] et l'on a ici évidemment

$$A_4 = \frac{(m_0)_e c^2}{e\chi_0}\,\frac{\omega_{44}}{2}, \qquad A_j = \frac{(m_0)_e c^2}{e\chi_0}\langle\omega_{4j}\rangle. \quad (22)$$

La grande portée du champ gravifique du système doit être assurée dans (19) par la condition $\xi_\nu^3 = 0$, tandis que la faible portée du champ nucléaire de chaque particule exige, d'après (21), que l'on ait

$$[b^{(lm)}_{(\omega)4q}]_\nu = 0 \qquad (q = 1, 2, 3).$$

Par contre, le caractère coulombien du champ électrostatique est assuré par $\eta_\nu^1 \simeq 0$, qui a lieu même pour une particule isolée. On voit donc que le champ gravifique newtonien est dû à l'interaction des particules, tandis que le champ coulombien peut être à la fois un champ d'interaction des particules et un champ propre à chaque particule.

Par suite de la présence des $(\alpha^i_p)_\nu$, les champs (19) dépendent évidemment du mouvement des particules et contiennent les réactions de rayonnement.

5. **Application à une particule isolée.** — Dans ce cas particulier important les expressions générales (19) se réduisent évidemment aux suivantes dans le référentiel x^i_ν par rapport auquel le mouvement moyen de la particule est nul ($\alpha^p_i = \delta^p_i$)

$$\langle g_{ik}\rangle = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{2}\sum_m (c^2_{lm})\, b^{(lm)}_{(g)ik}\, e^{-\xi_l r}, \qquad (23a)$$

$$\langle\omega_{ik}\rangle = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{2}\sum_m (c^2_{lm})\, b^{(lm)}_{(\omega)ik}\, e^{-\eta_l r}. \qquad (23b)$$

Pour une particule isolée, et d'après la définition même de la classe d'états $l = 3$, tous les c^2_{3m} sont identiquement nuls.

a. Champ électrique. — De (23 *b*) on déduit

$$\langle\omega_{44}\rangle = \mu_\omega\left(\frac{e^{-\eta_1 r} - e^{-\eta_2 r}}{r}\right),$$

μ_ω étant donné par

$$\mu_\omega = \sum_m c^2_{1m} b^{1m}_{(\omega)44} = -\sum_m c^2_{2m} b^{2m}_{(\omega)44}$$

par suite de (20 *b*) et de $c^2_{3m} = 0$. Le potentiel électrique correspondant s'écrit donc, d'après (22)

$$V = A_4 = \frac{(m_0)_e c^2}{2e\chi_0}\mu_\omega\left(\frac{e^{-\eta_1 r} - e^{-\eta_2 r}}{r}\right). \qquad (24)$$

Ce potentiel est identique au nouveau potentiel de M. de Broglie [1], la charge ε étant donnée par $\frac{(m_0)_e c^2 \mu_\omega}{2e\chi_0}$. Il est d'ailleurs la différence d'un potentiel quasi coulombien et d'un potentiel de Yukawa. En effet, les états sans rayonnement ($l = 1$) sont évidemment caractérisés par $\square\,\omega^{(1m)}_{ik} \simeq 0$ (absence de sources de rayonnement), ce qui correspond à $\eta^1 \simeq 0$, par suite de (16) et (17). La condition $\eta^1 \simeq 0$ signifie [2] que la masse propre du photon est voisine de zéro.

b. Champ magnétique. — Désignons par $\langle\vec{g}_4\rangle$ et $\langle\vec{\omega}_4\rangle$ les vecteurs d'espace de composantes

$$\langle g_{4i}\rangle \quad \text{et} \quad \langle\omega_{4i}\rangle \qquad (i = 1, 2, 3).$$

De même, soient $\vec{b}^{(lm)}_{(g)}$ et $\vec{b}^{(lm)}_{(\omega)}$ les vecteurs d'espace de composantes $b^{(lm)}_{(g)4i}$ et $b^{(lm)}_{(\omega)4i}$ respectivement. Les relations (23*a*) et (23*b*) donnent alors

$$\left.\begin{aligned}\langle\vec{g}_4\rangle &= \vec{B}_g\left(\frac{e^{-\xi_1 r} - e^{-\xi_2 r}}{r}\right),\\ \langle\vec{\omega}_4\rangle &= \vec{B}_\omega\left(\frac{e^{-\eta_1 r} - e^{-\eta_2 r}}{r}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

les coefficients étant définis par

$$\vec{B}_g = \sum_m c^2_{1m}\vec{b}^{(1m)}_{(g)} = -\sum_m c^2_{2m}\vec{b}^{(2m)}_{(g)},$$

$$\vec{B}_\omega = \sum_m c^2_{1m}\vec{b}^{(1m)}_{(\omega)} = -\sum_m c^2_{2m}\vec{b}^{(2m)}_{(\omega)}.$$

De (25) et de (22) on déduit le champ magnétique

$$\vec{H} = \frac{(m_0)_e c^2}{e\chi_0\sqrt{-1}}\,\mathrm{rot}\langle\vec{\omega}_4\rangle = -\frac{(m_0)_e c^2}{e\chi_0\sqrt{-1}}\vec{B}_\omega \times \nabla\left(\frac{e^{-\eta_1 r} - e^{-\eta_2 r}}{r}\right).$$

Le moment magnétique dipolaire $\langle\vec{M}_{\text{magn}}\rangle_{\text{dip}}$ qui correspond à ce champ est nul. Par contre, la moyenne quantique $\langle|\vec{M}_{\text{magn}}|_{\text{dip}}\rangle$ du module du moment magnétique dipolaire n'est pas nulle. En effet, la formule (18 *b*) montre que le champ magnétique de la particule dans l'état quantique (l, m) est donné

par

$$\vec{H}_{lm} = \frac{(m_0)_e c^2}{e\chi_0\sqrt{-1}} \Big\{ a_\omega \operatorname{rot}\Big[\vec{\sigma}_{lm} \times \nabla\Big(\frac{e^{-\eta_{1e} r}}{r}\Big)\Big] - \vec{b}^{(lm)}_{(\omega)} \times \nabla\Big(\frac{e^{-\eta_{1e} r}}{r}\Big)\Big\},$$

d'où l'on déduit

$$\big(\vec{M}_{\text{magn}}\big)_{lm} = \frac{(m_0)_e c^2}{e\chi_0\sqrt{-1}} a_\omega \vec{\sigma}_{lm} + \int \vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{H}_{lm}\, d\tau$$

et

$$\big\langle \big| \vec{M}_{\text{magn}} \big|_{\text{dip}} \big\rangle = \frac{(m_0)_e c^2}{e\chi_0} | a_\omega | \sum_l \sum_m c^2_{lm} \big| \vec{\sigma}_{lm} \big|,$$

quantité essentiellement positive.

En partant de (24) et de (25), tout en tenant compte de la condition $\eta_1 \simeq 0$ caractéristique du champ électromagnétique, on trouve, par un calcul facile, l'expression suivante pour l'énergie

$$W_0 = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2)\, d\tau$$

du champ électromagnétique propre de la particule

$$W_0 = \Big\{ \frac{2}{3} \Big[\frac{(m_0)_e c^2}{e\chi_0} \Big]^2 \Big(\frac{3\mu^2_\omega}{8} + \big| \vec{B}_\omega \big|^2 \Big) \Big\} \frac{\eta_2}{4}, \qquad (26)$$

quantité essentiellement finie.

c. Champ nucléaire. — Considérons finalement la densité maxwellienne w_{ik} d'énergie-impulsion du champ nucléaire

$$w_{ik} = \frac{1}{4\pi} \Big[\frac{(m_0)_e c_2}{e} \Big]^2 \Big(\frac{1}{4} g_{ik} N_{jl} N^{jl} - N_{ij} N^j_k \Big).$$

Pour déterminer l'énergie propre $W_0 = \int w_{44}\, d\tau$ du champ nucléaire de la particule, il suffit d'utiliser les expressions (21) en y introduisant le vecteur $\langle \vec{g}_4 \rangle$ donné par (25). Le calcul qui détermine l'énergie électromagnétique (26) donne ici sans difficulté

$$W_0 = \Big\{ \frac{2}{3} \Big(\frac{(m_0)_e c^2}{e} \Big)^2 \big| \vec{B}_g \big|^2 \Big\} \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{4(\xi_1 + \xi_2)}. \qquad (27)$$

On voit ici, conformément aux résultats de M. de Broglie [1], que le champ nucléaire traduit l'existence de deux particules de masses propres $m_l = \frac{h\xi_l}{2\pi c}$ différentes. La faible portée bien connue des forces nucléaires (ξ_1 et $\xi_2 \simeq 10^{13}$ cm) exige d'ailleurs que ces particules soient des mésons. Les formules (26) et (27) ont la même forme que les formules correspondantes de la théorie de M. de Broglie [1].

6. Application au spectre de l'hydrogène.

— Pour des ondes monochromatiques dans un champ électrique pur les équations de Dirac [3] s'écrivent

$$\Big[\frac{1}{c}(W + \varepsilon V) + \frac{h}{2\pi i} \sum_1^3 \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \alpha_4 m_0 c \Big] \psi_k, \qquad (k = 1, 2, 3, 4), \qquad (28)$$

ε étant la charge et $W = E + m_0 c^2$ l'énergie de l'électron. Pour un ensemble de valeurs des quatre nombres quantiques qui déterminent les ψ_k, l'état correspondant du système électron-proton peut appartenir à l'une quelconque des trois classes définies précédemment, de sorte que d'après les résultats du paragraphe 4, le potentiel quantifié V_m qu'il faut utiliser dans (28) a la forme

$$V_m \doteq \frac{\varepsilon}{r} (k_{1m} e^{-\eta_1 r} + k_{2m} e^{-\eta_2 r} + k_{3m}).$$

Remarquons que V_m n'étant pas une grandeur observable $\langle V \rangle$ ne reste pas nécessairement finie pour $r \to 0$. Nous poserons d'ailleurs

$$k_{1m} + k_{2m} + k_{3m} = 1,$$

condition compatible avec les conditions fondamentales

$$\sum_l \sum_m c^2_{lm} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_l \sum_m c^2_{lm} k_{lm} = 0.$$

Posons

$$A^2 = \frac{2\pi}{h} \Big(m_0 c + \frac{W}{c} \Big), \qquad B^2 = \frac{2\pi}{h} \Big(m_0 c - \frac{W}{c} \Big),$$

$$\alpha = \frac{2\pi\varepsilon^2}{ch}$$

et admettons, comme dans le cas coulombien [3], que ψ est le produit d'une fonction sphérique de Laplace par une fonction de r. Les parties radiales F et G des ψ_k satisfont alors [3] aux équations (²).

$$\left.\begin{aligned} &\Big[A^2 - \frac{\alpha}{r} (k_{1m} e^{-\eta_1 r} + k_{2m} e^{-\eta_2 r} + k_{3m}) \Big] F + \frac{dG}{dr} - \frac{l}{r} G = 0, \\ &\Big[B^2 + \frac{\alpha}{r} (k_{1m} e^{-\eta_1 r} + k_{2m} e^{-\eta_2 r} + k_{3m}) \Big] G + \frac{dF}{dr} + \frac{l+2}{r} F = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

lorsque le nombre quantique j est de la forme $l + \frac{1}{2}$. Pour $j = l - \frac{1}{2}$ les équations correspondantes s'obtiennent [3] en changeant l en $-(l+1)$. Posons d'une part

$$F = e^{-ABr} \sum_s a_s r^{\gamma+s}, \qquad G \doteq e^{-ABr} \sum_s b_s r^{\gamma+s}$$

(²) Il ne faut pas confondre l'entier $l = 0, 1, 2, \ldots$ dans les équations (29) avec l'indice $l = 1, 2, 3$ utilisé dans les paragraphes 4 et 5.

et d'autre part

$$\theta_{mp}^{(a)} = \frac{1}{a_p} \sum_{\mu=0}^{p} \frac{(-1)^{p-\mu}}{(p-\mu)!} a_\mu (k_{1m} \eta_1^{p-\mu} + k_{2m} \eta_2^{p-\mu} + k_{3m} \delta_{p\mu}),$$

$$\theta_{mp}^{(b)} = \frac{1}{b_p} \sum_{\mu=0}^{p} \frac{(-1)^{p-\mu}}{(p-\mu)!} b_\mu (k_{1m} \eta_1^{p-\mu} + k_{2m} \eta_2^{p-\mu} + k_{3m} \delta_{p\mu}),$$

p étant la valeur de s telle que $a_s = b_s = 0$ pour $s > p$ (afin que F et G restent finis pour $r \to \infty$). En développant les exponentielles de (29), un calcul analogue au calcul du cas coulombien [3], conduit à la formule suivante des niveaux d'énergie

$$\frac{E}{m_0 c^2} \left(\frac{\theta_{mp}^{(a)} + \theta_{mp}^{(b)}}{2} \right) = \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{\left[p + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{E_c}{m_0 c^2}, \qquad (30)$$

en désignant par E_c les niveaux coulombiens d'énergie et en tenant compte de la condition $\theta_{mp}^{(a)} \simeq \theta_{mp}^{(b)} \simeq 1$. On voit donc que la structure hyperfine peut être traitée comme une petite perturbation de l'énergie propre de l'électron due à son interaction avec les champs propres non coulombiens du proton. Par une transformation $x^i \to \bar{x}^i$ telle que

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^i} = \left(\frac{\bar{r}}{r} \right) \frac{1}{k_{1m}\, e^{-\eta_1 r} + k_{2m}\, e^{-\eta_2 r} + k_{3m}}$$

les équations (28) deviennent

$$\left[\frac{1}{c} \left(W + \frac{\varepsilon}{r} \right) + \vec{\alpha} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{c} \vec{A} - \frac{h}{2\pi i} \nabla \right) + \alpha_4 m_0 c \right] \psi_k = 0,$$

avec $A^i = V_m \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^i}$. On peut donc prendre $\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) \vec{\alpha} . \vec{A}$ comme hamiltonien d'interaction et appliquer à la détermination de $\theta_{mp}^{(a)} + \theta_{mp}^{(b)}$ les méthodes [4, 6] qui déterminent l'influence du rayonnement de l'électron sur son énergie propre. Les résultats numériques sont indépendants de l'origine de $\vec{A}$.

7. Quantification des équations du mouvement. — La quantification du champ métrique a évidemment pour conséquence la nécessité de la quantification des équations du mouvement des particules. Nous nous bornerons ici à de brèves indications à ce sujet. L'opération de quantification des équations du mouvement est très simple quand on part des équations [I, (33)] obtenues précédemment pour des particules à masse et charge finies. Il suffit évidemment d'introduire dans ces équations :

1° à la place des champs métriques g_{ik}^0 et ω_{ik}^0 (non quantifiés et non troublés par la particule dont on étudie le mouvement), les champs $\langle \omega_{ik}^0 \rangle$ et $\langle g_{ik}^0 \rangle$ obtenus à partir des formules générales (19) en supprimant dans ces expressions les termes qui représentent les champs propres de la particule;

2° les champs propres quantifiés $\langle (\omega_{ik})_\nu \rangle$ et $\langle (g_{ik})_\nu \rangle$ de la particule (donnés par les expressions (19) appliquées à une seule particule).

De plus on doit naturellement prendre la limite des quantités

$$\widetilde{\theta_g^{ik}} \equiv \int_{\tau_g} \theta^{ik}\, d\tau_g \simeq \frac{8\pi K_g}{c^2} \frac{b_g - 2}{3 b_g + 2} \int_{m_0} \langle g^{ik} \rangle \delta m_0,$$

$$\theta_\omega^{ik} \simeq \frac{8\pi K_\omega}{c^2} \frac{b_\omega - 2}{3 b_\omega + 2} \int_{e} \langle \omega^{ik} \rangle \delta e$$

pour $\rho = 0$ (particules ponctuelles). Ces limites sont finies. Le résultat [I, (46)] subsiste d'ailleurs évidemment après quantification, c'est-à-dire

$$\frac{1}{m_\omega} \left[\frac{d}{dx^i} \left(\lim_{\rho \to 0} \widetilde{\theta_\omega^{ki}} \right) \right]_{n.e.} = \left[\frac{Q(m_0)_e}{e M_0} - 1 \right] \left\{ {i \atop jk} \right\}_{\omega 0} V^j V^k.$$

Enfin, les vecteurs $\vec{M}_a$ des particules sont directement reliés par [I, (47')] au spin (grandeur quantique observable).

Manuscrit reçu le 20 juin 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Broglie L. de. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **229**, 157, 269, 401; *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 862; *Portugaliae Mathematica*, 1949, **8**, 37-48.

[2] Broglie L. de. — Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs, Gauthier-Villars, Paris, 1949, Chap. V.

[3] Broglie L. de. — L'électron magnétique, Hermann, Paris, 1934, Chap. XVII.

[4] French J. B. et V. F. Weisskopf. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1240-1248.

[5] Giao A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 278, 434.

[6] Kroll N. M. et Lamb, jr. W. E. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 388-398.

EFFICACITÉ THÉORIQUE DES COMPTEURS A RAYONS X

Par GILBERT BARRÈRE.
Attaché de Recherches au C. N. R. S.
Laboratoire de Chimie physique de la Faculté des Sciences de Paris.

Sommaire. — Nous avons étudié l'efficacité théorique des compteurs à rayons X en fonction de leurs dimensions et du coefficient d'absorption du gaz de remplissage afin de pouvoir orienter convenablement leur construction suivant les besoins expérimentaux et de pouvoir, en particulier, réaliser l'efficacité maximum. Une preuve expérimentale a été donnée à l'appui de notre étude.

Les compteurs à rayons X peuvent comporter, soit une fenêtre latérale, soit une fenêtre en bout. Les compteurs à fenêtre latérale présentent l'avantage d'admettre directement les rayons X dans le volume actif; le trajet des rayons dans le compteur est au plus égal au diamètre de ce dernier et pour obtenir un bon rendement, on peut accroître ce diamètre, mais on est vite gêné par l'importance du mouvement propre; on peut aussi augmenter l'absorption en choisissant un gaz très absorbant et en faisant croître sa pression, mais on est alors limité par la tension de fonctionnement qui s'élève rapidement, au point de sortir des limites de possibilité des montages habituels de comptage qui ne permettent pas, en général de dépasser 2 500 à 3 000 V.

L'inconvénient des compteurs à fenêtre en bout vient du fait que les rayons X doivent, avant de pénétrer dans le volume actif, traverser le volume inactif où ils perdent une grande partie de leur intensité. Nous allons voir l'influence de ce volume inactif sur l'efficacité des compteurs, en rapport avec d'autres paramètres.

Etude de l'efficacité théorique des compteurs à fenêtre en bout.

Définitions. — Nous appellerons efficacité d'un compteur à rayons X, la probabilité pour qu'un photon qui entre dans ce compteur, donne lieu à une décharge.

Or, pour qu'un photon entraîne une décharge, il faut que ce photon produise un événement ionisant dans le volume actif du compteur [1]. Mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante; il faut aussi que cette ionisation entraîne une avalanche et par là, une décharge. Nous considérons ici que le photon disparaît par effet photoélectrique pur, la probabilité de l'effet Compton étant relativement très faible au-dessous de 100 000 eV et la diffusion ordinaire, négligeable. Nous ne nous occupons pas des effets secondaires donnant plusieurs électrons par photon absorbé, car nous supposons que ces électrons contribuent à une même avalanche.

Nous sommes donc amenés à considérer l'efficacité réelle comme le produit de deux probabilités :

la probabilité pour qu'un photon qui pénètre dans un compteur soit absorbé dans le volume actif et que nous appellerons l'efficacité théorique;

la probabilité pour que les électrons secondaires produits par cette absorption entraînent une avalanche et que nous désignerons par α.

On a donc

$$\varepsilon_{\text{réelle}} = \varepsilon_{\text{th}}\,\alpha.$$

Nous étudierons pour l'instant la seule efficacité théorique, réservant pour plus tard la détermination de l'efficacité réelle et par là même, de la probabilité α vraisemblablement voisine de l'unité [2].

Nous ne parlerons, d'autre part, de l'efficacité théorique d'un compteur à rayons X que pour un rayonnement d'une énergie bien déterminée, mais nous traiterons cependant tout d'abord le problème de l'efficacité dans le cas général et nous appliquerons ensuite les résultats obtenus au rayonnement $K\alpha_1$ du cuivre.

Nous supposerons le compteur placé sur un spectrographe à focalisation; dans le plan vertical tangent au cercle de focalisation, une étroite fente percée dans une plaque de plomb permet à un faisceau parallèle ou faiblement convergent de rayons X monoénergétiques dont la direction moyenne est parallèle à l'axe du compteur, d'irradier la fenêtre.

[1] Il se peut qu'un photon disparaisse par effet photoélectrique en dehors du volume actif, mais suffisamment près de ce dernier pour produire à son intérieur des électrons secondaires déclenchant une décharge.

[2] L'efficacité réelle paraît être peu différente de l'efficacité théorique pour les rayons γ.
A. ROGOSINSKI et A. VOISIN, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, 225, 409
R. BOUCHEZ, *Thèse*, Paris, 1950.

Soit I_0 (*fig.* 1) l'intensité de ce rayonnement dont la longueur d'onde est λ_0.

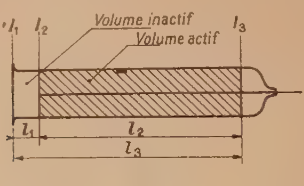


Fig. 1

Soient :

I_1 l'intensité du rayonnement après traversée de la fenêtre;
I_2 l'intensité du rayonnement après traversée du volume inactif;
I_3 l'intensité du rayonnement après traversée du volume actif;
l_1 la longueur du volume inactif ;
l_2 » » actif;
l_3 la distance de la fenêtre à la fin du volume actif.

On a

$$l_1 + l_2 = l_3.$$

Le rayonnement incident d'intensité I_0 s'affaiblit au cours de la traversée de la fenêtre que l'on choisira aussi peu absorbante que possible et son intensité à la sortie devient

$$I_1 = a I_0, \quad \text{avec} \quad a < 1.$$

Les intensités I_2 et I_3 peuvent s'exprimer conformément aux lois de l'absorption en fonction de I_0, l_1, l_3 et de μ, coefficient d'absorption linéaire du gaz de remplissage pour le rayonnement incident :

$$I_2 = a I_0 \, e^{-\mu l_1}, \qquad I_3 = a I_0 \, e^{-\mu l_3}.$$

Soit A l'absorption dans le volume actif du compteur de longueur l_2, A peut s'exprimer en fonction de I_0 :

$$A = I_2 - I_3 = a I_0 (e^{-\mu l_1} - e^{-\mu l_3}). \tag{1}$$

Nous définirons le rendement théorique d'un tel compteur par

$$R = \frac{A}{I_0} = a(e^{-\mu l_1} - e^{-\mu l_3}). \tag{2}$$

Si l'intensité et l'énergie du faisceau monoénergétique de rayons X recueilli demeurent constantes et la fenêtre du compteur invariable, R variera avec μ, l_1 et l_3 comme $\frac{1}{a I_0} = z$

$$z = e^{-\mu l_1} - e^{-\mu l_3}. \tag{3}$$

Remarquons que z est l'efficacité théorique du compteur.

Discussion. — Étudions la variation de z, successivement en fonction des variables μ, l_1 et l_3 et pour cela, différentions l'équation (3) :

$$dz = (-l_1 \, e^{-\mu l_1} + l_3 \, e^{-\mu l_3}) \, d\mu - \mu \, e^{-\mu l_1} \, dl_1 + \mu \, e^{-\mu l_3} \, dl_3. \tag{4}$$

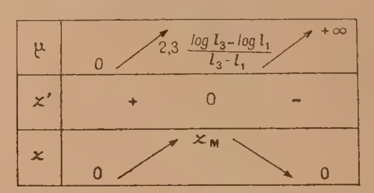
1° Supposons l_1 et l_3 constants,

$$dl_1 = dl_3 = 0,$$

l'équation (4) devient

$$dz = (-l_1 \, e^{-\mu l_1} + l_3 \, e^{-\mu l_3}) \, d\mu. \tag{5}$$

Le tableau des variations de z en fonction de μ pour $\mu > 0$, est le suivant :



μ	0	↗	$2{,}3 \, \frac{\log l_3 - \log l_1}{l_3 - l_1}$	↗	$+\infty$
z'		+	0	−	
z	0	↗	z_M	↘	0

z est égal à la différence des deux exponentielles

$$y_1 = e^{-\mu l_1}, \qquad y_3 = e^{-\mu l_3}$$

que nous avons construites sur un même graphique (*fig.* 2). Le rendement croît d'abord rapidement avec μ, passe par un maximum pour

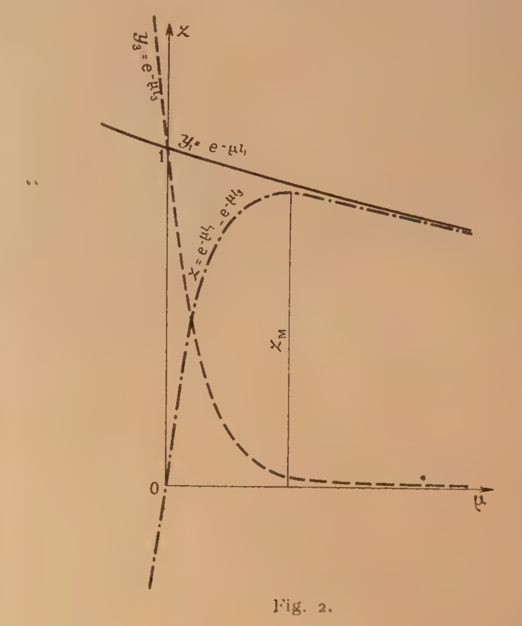


Fig. 2.

$$\mu_M = 2{,}5 \, \frac{\log l_3 - \log l_1}{l_3 - l_1}, \tag{6}$$

pour décroître ensuite plus lentement.

L'efficacité maximum z_M s'obtient en remplaçant μ par sa valeur dans (3) et l'on a ensuite $R_M = az_M$, calculable si l'on connaît l'absorption de la fenêtre pour le rayonnement incident. Il faut ensuite choisir un gaz de remplissage et calculer sa pression de façon qu'il présente, pour le rayonnement à étudier, dans des conditions expérimentales convenables, un coefficient d'absorption linéaire égal au μ_M calculé.

Ainsi, pour l'efficacité maximum, la valeur de μ est imposée par les cotes du compteur. A un groupe donné de cotes, correspond une seule valeur de μ pour laquelle on obtient une valeur de l'efficacité maximum, valeur qui varie avec les cotes. Nous allons donc examiner, de quelle façon il convient de choisir ces dernières, pour que l'efficacité maximum se rapproche autant que possible de l'unité.

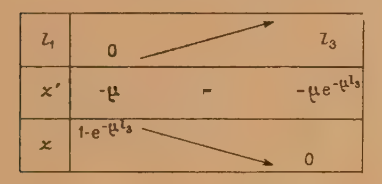
2° Supposons μ et l_3 constants,

$$d\mu = dl_3 = 0,$$

l'équation (4) devient

$$dz = -\mu\, e^{-\mu l_1}\, dl_1.$$

Tableau des variations de z en fonction de l_1 pour $l_3 > l_1 \geq 0$.



l_1	0	↗	l_3
z'	$-\mu$	$-$	$-\mu e^{-\mu l_3}$
z	$1-e^{-\mu l_3}$	↘	0

Nous avons présenté (*fig.* 3) la variation de l'efficacité théorique en fonction de l_1. On voit que cette efficacité décroît très vite lorsque l_1 augmente.

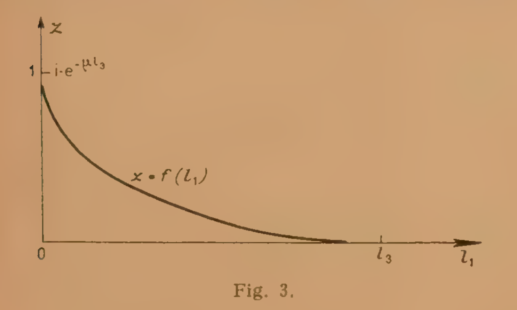


Fig. 3.

On a donc intérêt à faire débuter le volume actif aussi près que possible de la fenêtre. Comme il ne nous a pas été possible de réaliser des compteurs fonctionnant correctement avec l_1 nul, nous envisageons l_1 petit, mais différent de zéro. Dans le cas où cette condition deviendrait réalisable, l'efficacité qui serait fonction de μ et de l_3 seulement, pourrait devenir très grande.

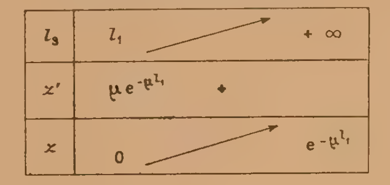
3° Supposons μ et l_1 constants,

$$d\mu = dl_1 = 0,$$

l'équation (4) s'écrit

$$dz = \mu\, e^{-\mu l_3}\, dl_3.$$

Tableau des variations de z en fonction de l_3, l_3 variant de l_1 à $+\infty$.



l_3	l_1	↗	$+\infty$
z'	$\mu e^{-\mu l_1}$	$+$	
z	0	↗	$e^{-\mu l_1}$

Nous avons tracé (*fig.* 4) la variation de l'efficacité théorique z en fonction de l_3. On voit que l'efficacité croît avec l_3 pour tendre vers une limite qui est imposée par les valeurs de μ et de l_1. Le mouvement propre augmente aussi avec l_3 et à partir d'une certaine valeur de l_3, la pente de la courbe devient faible, on n'a qu'une faible croissance de l'efficacité pour une grande augmentation de l_3 et par conséquent du mouvement propre. Les exigences expérimentales guideront dans le choix de la valeur de l_3.

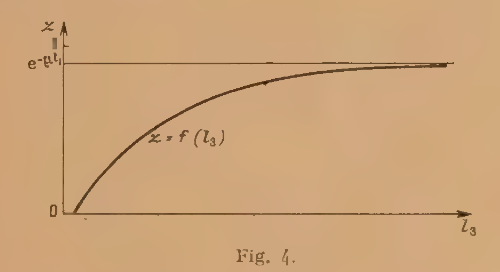


Fig. 4.

La plus grande partie de ces résultats auraient pu être déduits, mais d'une manière moins rigoureuse, de l'examen du graphique de la figure 2, en remarquant que, pour augmenter l'efficacité, il faut écarter autant que possible les deux exponentielles dans la région des μ positifs.

Pour une même valeur de μ, $y_1 = e^{-\mu l_1}$ s'écarte d'autant moins vite de la droite $y = 1$ avec laquelle elle se confond pour $l_1 = 0$, que l_1 est plus faible. D'autre part, $y_3 = e^{-\mu l_3}$ chute d'autant plus rapidement vers l'axe des μ que l_3 est plus grand.

Cette discussion, à variables séparées, nous montre dans quel sens il convient d'orienter la construction des compteurs à rayons X à grande efficacité, mais elle ne donne pas une idée nette des possibilités qui peuvent être atteintes puisque à un groupe de valeurs l_1, l_3 correspond une seule valeur de μ assurant l'efficacité maximum et que dans les deux derniers

cas, μ demeurait fixe. C'est pourquoi nous avons construit (*fig.* 5) des courbes donnant l'efficacité

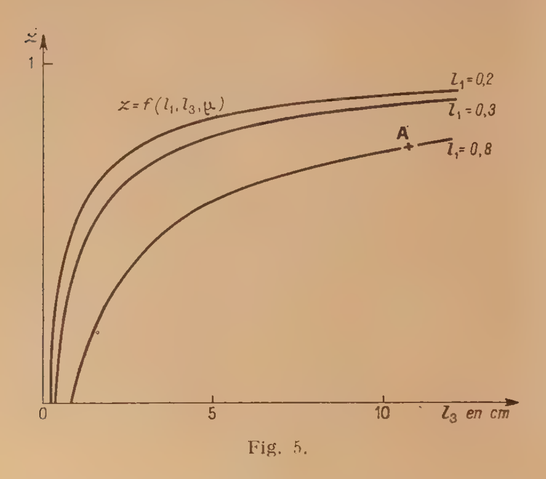


Fig. 5.

théorique en fonction des trois variables μ, l_1 et l_3, μ étant calculé de façon à réaliser l'efficacité maximum pour chaque groupe de valeurs de l_1, l_3 à l'aide de l'équation (6).

Pour chaque courbe, l_1 a une valeur faible, mais fixe, tandis que μ, l_3 et z varient.

Nous avons représenté (*fig.* 6) la variation de μ en fonction de l_1 et l_3. Pour chaque courbe, l_1 demeure fixe et μ varie en fonction de l_3.

Conclusions. — Pour avoir une bonne efficacité, il faut donc diminuer l_1 autant que le permettent les possibilités de construction et dans la mesure où cela ne nuit pas au bon fonctionnement; il faut ensuite choisir une valeur de l_3 en tenant compte de l'allure des courbes de la figure 5 de façon à réunir les conditions suivantes :

efficacité convenable;
mouvement propre acceptable;
coefficient d'absorption facile à réaliser (*fig.* 6).

Notre travail se poursuit dans ce sens et dans la mise au point de tels compteurs.

Étude expérimentale. — Le compteur utilisé est du type établi pour le rayonnement cosmique par M. Maze ([2]) que nous remercions des aimables conseils qu'il nous a donnés.

Il est en verre mince et à cathode externe d'aquadag. Il est fermé au bout par un disque de polystyrène, collé au verre, et portant une fente de 2×18 mm permettant l'accès d'une étroite bande spectrale, à travers une feuille de cellophane collée au polystyrène et étanche au vide.

Le fil central en molybdène de 1/10e de millimètre de diamètre est fixé, d'un côté à la plaquette de polystyrène par l'intermédiaire d'un fil mince de nylon collé et, de l'autre, au verre même du compteur au moyen d'un fil de copperclad soudé au verre et sortant à l'extérieur du compteur. Les liaisons nylon-molybdène et molybdène-copperclad, sont respectivement isolées au moyen d'une perle isolante et d'un tube de verre pénétrant dans le compteur. La fenêtre n'est pas axiale, afin que le rayonnement passe dans le gaz en irradiant aussi peu que possible la perle isolante et le fil central.

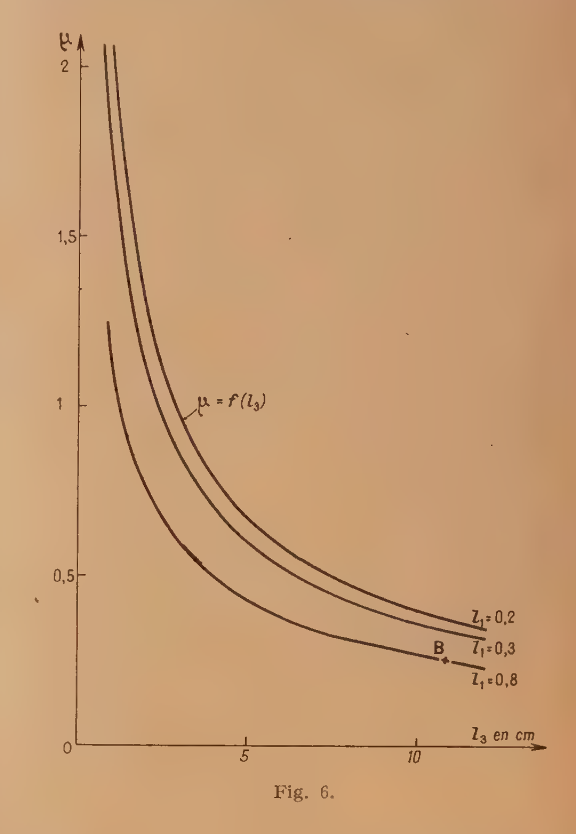


Fig. 6.

Le compteur destiné à l'étude des spectres se déplace de telle façon que le grand axe de la fenêtre demeure vertical et coupe le cercle de focalisation du spectrographe à cristal courbé de Mlle Cauchois, l'axe du compteur demeurant parallèle à la droite joignant le centre du cristal au centre de la fenêtre.

Dimensions. — Le diamètre du tube est de 2,4 cm environ; la distance l_1 de la fenêtre au volume actif est de 0,8 cm; la distance l_3 de la fenêtre à la fin du volume actif est de 10,8 cm. On a donc $l_2 = 10$ cm.

Efficacité maximum. — La formule (6) donne

$$\mu = 0{,}25 \qquad \text{(point B, } fig.\ 6\text{)}.$$

([2]) R. Maze, *J. Phys. Rad.*, 1946, **7**, p. 164.

Pour un rayonnement pour lequel le coefficient linéaire d'absorption du gaz de remplissage est de 0,25, l'efficacité théorique sera d'après (3) :

$$\varepsilon = e^{-0,25.0,8} - e^{-0,25.10,8},$$

$$\varepsilon = 0,75 \quad \text{(point A sur la } \textit{figure } 5).$$

Remplissage. — C'est ici qu'il devient indispensable de préciser la nature du rayonnement utilisé. Nous avons opéré sur la raie $K\alpha_1$ du cuivre.

Nous avions l'habitude de remplir les compteurs avec un mélange de 90 pour 100 d'argon et 10 pour 100 de méthylal. Nous avons cherché quelle était la pression d'argon nécessaire à la réalisation d'un milieu présentant un coefficient linéaire d'absorption de 0,25 en négligeant l'absorption due au méthylal, pour le rayonnement utilisé.

Pour l'argon :

$$z = 18, \quad A = 39,94, \quad \rho = 1,78.10^{-3}.$$

La longueur d'onde de la raie $K\alpha_1$ du cuivre, 1,537 Å se situe dans la branche K de la courbe d'absorption. Pour $Z\lambda = 27,66$, les tables de Jönsson ([3]) donnent

$$(\mu_e N)_K = 249,$$

d'où

$$p = \frac{0,25.76.39,94}{249.18.1,78.10^{-3}} = 95^{\text{cm}},1 \text{ de mercure.}$$

Un tel remplissage est déjà difficile à réaliser avec les possibilités dont nous disposons, mais, d'autre part, des compteurs ainsi remplis exigeraient un voltage de fonctionnement élevé et c'est la raison pour laquelle nous avons utilisé le xénon, ayant un coefficient d'absorption plus élevé qui nous permet de réaliser la condition de rendement maximum avec une pression beaucoup plus faible.

Pour le xénon :

$$z = 54, \quad A = 131,3, \quad \rho = 5,85.10^{-3}.$$

La longueur d'onde de la raie $K\alpha_1$ du cuivre se situe dans la branche L_1 de la courbe d'absorption de ce gaz.

Pour $Z\lambda = 83$, les tables de Jönsson donnent

$$(\mu e N)_K = 5\,000,$$

ce qui, ramené à la branche L_1, donne 784, d'où

$$p = \frac{0,25.76.131,3}{784.54.5,85.10^{-3}} = 10^{\text{cm}},07 \text{ de mercure.}$$

Le compteur a été rempli avec du xénon à une pression de 10 cm et de l'éther à une pression partielle de 1 cm de mercure; l'absorption due à l'éther a été négligée. Le voltage d'utilisation a été de 1570 V le palier s'étendait sur une centaine de volts avec une pente de 8 pour 100.

Nous nous servons couramment au Laboratoire de compteurs Philips Norelco à fenêtre de verre aminci que nous ne pouvons d'ailleurs plus nous procurer (licence d'importation refusée) et nous avons comparé le rendement du compteur, ci-dessus décrit, monté avec une fenêtre de cellophane à celui d'un Norelco pour la raie $K\alpha_1$ du cuivre. Pour cela, nous avons placé devant un tube à rayons X alimenté par un poste de haute tension fonctionnant sur courant stabilisé et dont le régime demeurait constant, un spectrographe à cristal courbé spécialement équipé pour compteurs. Nous avons réglé l'appareil de façon qu'une fente métallique plus petite que la fenêtre du compteur laisse passer la raie $K\alpha_1$ du cuivre. Nous avons mis ensuite tour à tour les deux compteurs en fonctionnement sur le spectrographe de façon que le même faisceau incident irradie la fenêtre de chaque compteur. Comme les fenêtres ne sont pas identiques nous allons comparer les rendements des deux appareils et non les efficacités. Le rendement théorique a été défini par l'équation (2), nous voyons qu'il ne diffère de l'efficacité théorique définie par l'équation (3) que par le facteur a d'affaiblissement dans la traversée de la fenêtre.

Le tableau suivant indique les résultats bruts obtenus :

	Mouvement propre en l'absence de rayons X.	Sur Raie $K\alpha_1$ du cuivre.
Compteur Norelco	24 ± 5	497 ± 23
Compteur ci-dessus décrit.....	103 ± 11	$3\,201 \pm 58$

On voit que le rendement du compteur ainsi réalisé est très supérieur à celui du Norelco pour la raie $K\alpha_1$ du cuivre.

Manuscrit reçu le 26 juin 1950.

([3]) *Voir* Edvin Jönsson, *Thèse*, Uppsala, 1928 et le cours de Mlle Cauchois pour le procédé de calcul.

Des mesures du coefficient d'absorption du Xénon ont été faites par T. N. White, *Phys. Rev.*, 46, 865. Les résultats diffèrent peu de ceux obtenus avec les tables de Jönsson.

SUR UN FORMALISME DE LA THÉORIE DES CORPUSCULES DE SPIN 0 OU $\hbar$ ET LEURS ÉQUATIONS D'ONDES DANS LES CHAMPS EXTÉRIEURS

Par Gérard PETIAU.
Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — Examen et discussion des équations d'ondes obtenues après élimination des fonctions d'ondes n'évoluant pas directement dans la théorie du corpuscule de spin zéro ou $\hbar$ de M. Louis de Broglie. Étude de la correspondance entre le formalisme développé et les diverses formes de la théorie du méson. Examen des différents types de champs extérieurs susceptibles d'agir sur le corpuscule et des modes d'introduction de ces champs dans l'équation d'ondes. Application à l'étude des propriétés du corpuscule de spin zéro dans divers champs extérieurs.

1. Dans le formalisme introduit par M. L. de Broglie [1], les équations d'ondes du corpuscule de spin total maximum $\hbar$, photon ou méson suivant la valeur attribuée à la masse propre m_0, se représentent par le système

$$\left\{\begin{array}{l}\Big(p_0\frac{1}{2}[(\alpha_0)_{i_1m_1}(\alpha_4)_{i_2m_2}+(\alpha_4)_{i_1m_1}(\alpha_0)_{i_2m_2}] \\ \quad \Big\{\mathbf{p}\,\frac{1}{2}\Big[(\vec{\alpha})_{i_1m_1}(\alpha_4)_{i_2m_2}+(\alpha_4)_{i_1m_1}(\vec{\alpha})_{i_2m_2}\Big]\Big\} \\ \qquad\qquad + m_0c(\alpha_4)_{i_1m_1}(\alpha_4)_{i_2m_2}\Big)\Phi_{m_1m_2}=0 \\ \qquad (i_1,\ m_1,\ i_2,\ m_2=1,\ 2,\ 3,\ 4).\end{array}\right. \tag{1}$$

Les matrices $\alpha_0 = 1$, α_0, $\vec{\alpha}$, α_4 forment deux systèmes indépendants de matrices de Dirac telles que

$$\alpha_\mu^{(i)}\alpha_\nu^{(i)}+\alpha_\nu^{(i)}\alpha_\mu^{(i)}=2\delta_{\mu\nu}^{(i)} \qquad (i,\ j=1,\ 2),$$
$$\alpha_\mu^{(i)}\alpha_\nu^{(j)}=\alpha_\nu^{(j)}\alpha_\mu^{(i)} \qquad (\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Si le corpuscule porte la charge e, nous remplacerons les opérateurs p_0, $\mathbf{p}$ par les opérateurs modifiés

$$\left.\begin{array}{l}P_0=p_0+\frac{e}{c}V=-i\hbar\frac{1}{c}\partial_t+\varepsilon V, \\ \mathbf{P}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}=\ \ i\hbar\,\partial_{\mathbf{x}}+\varepsilon\mathbf{A};\end{array}\right\} \tag{2}$$

$\varepsilon = \frac{e}{c}$, V, $\mathbf{A}$, potentiels scalaire et vecteur d'un champ électromagnétique extérieur.

Les valeurs propres de la matrice

$$\frac{1}{2}[(\alpha_0)_{i_1m_1}(\alpha_4)_{i_2m_2}+(\alpha_4)_{i_1m_1}(\alpha_0)_{i_2m_2}] \tag{3}$$

sont $+1$, -1 et 0 et, par suite, seules 8 des 16 fonctions d'ondes Φ_{i_1,i_2} satisfont à des équations d'évolution dans le système (1).

Dès le début du développement de la théorie du méson divers auteurs [2] se sont préoccupés de l'élimination des fonctions d'ondes non évolutives des équations du méson en partant, non pas de l'équation (1), mais des formes irréductibles de celle-ci écrites comme équations de champs, les fonctions Φ_{i_1,i_2} étant remplacées par certaines de leurs combinaisons linéaires correspondant à des formes tensorielles remarquables.

Pour effectuer cette élimination à partir de l'équation (1) nous considérerons avec M. Dirac les matrices $\vec{\alpha}$, α_4 construites à partir de matrices du second rang, le système des matrices $\vec{\sigma}$ de Pauli et un système analogue $\vec{\rho}$ en écrivant

$$\vec{\alpha}=\vec{\sigma}\rho_1, \qquad \alpha_4=\rho_3;$$

avec

$$\sigma_1 \text{ ou } \rho_1=\begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{vmatrix}, \qquad \sigma_2 \text{ ou } \rho_2=\begin{vmatrix} & i \\ -i & \end{vmatrix},$$
$$\sigma_3 \text{ ou } \rho_3=\begin{vmatrix} 1 & \\ & -1 \end{vmatrix}$$

et

$$\sigma_i\sigma_j=-i\sigma_k \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3).$$

Les 16 fonctions Φ_{i_1,i_2} (i_1, $i_2 = 1, 2, 3, 4$) s'écriront maintenant avec deux paires d'indices variant sur 1 et 2, soient $\Phi_{i_1k_1;i_2k_2}$, les indices i_1, i_2 correspondant au couple des matrices $\vec{\sigma}$, les indices k_1, k_2 au couple des matrices $\vec{\rho}$.

Nous développerons maintenant l'équation (1) en mettant en évidence les fonctions correspondant aux indices k_1, k_2.

Nous écrirons φ_{11}, φ_{12}, φ_{21}, φ_{22} pour Φ_{m_11,m_21}, Φ_{m_11,m_22}, Φ_{m_12,m_21}, Φ_{m_12,m_22}. Nous obtenons alors le système

$$\left.\begin{array}{r}2P_0\varphi_{11}+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)\varphi_{21}+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)\varphi_{12}+2m_0c\varphi_{11}=0, \\ 2P_0\varphi_{22}+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)\varphi_{12}+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)\varphi_{21}-2m_0c\varphi_{22}=0, \\ (\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)\varphi_{22}-(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)\varphi_{11}+2m_0c\varphi_{12}=0, \\ (\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)\varphi_{11}-(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)\varphi_{22}-2m_0c\varphi_{21}=0.\end{array}\right\} \tag{3}$$

Ces équations mettent en évidence l'évolution des fonctions φ_{11}, φ_{22} et la possibilité de l'élimination des fonctions φ_{12} et φ_{21}.

(1) L. de Broglie, Une nouvelle théorie de la lumière, t. 1 et 2.

(2) *Voir* notamment : Gunn, *Proc. Roy. Soc.*, 1948, A **193**, p. 559 et la Bibliographie donnée par cet auteur.

Nous tirons immédiatement φ_{12} et φ_{21} des deux dernières équations et en reportant dans les deux premières nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}
&P_0\varphi_{11}+\frac{1}{4m_0c}\Big\{\Big[(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)\Big]\varphi_{11}\\
&\qquad-\Big[(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)\Big]\varphi_{22}\Big\}+m_0c\,\varphi_{11}=0,\\
&P_0\varphi_{22}+\frac{1}{4m_0c}\Big\{\Big[(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)\Big]\varphi_{11}\\
&\qquad-\Big[(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)\Big]\varphi_{22}\Big\}-m_0c\,\varphi_{22}=0;
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)&=\mathbf{P}^2+\sum_{(i,j)}(P_iP_j-P_jP_i)(\sigma_i\sigma_j)^{(1)}\\
&=\mathbf{P}^2-\sum_{(i,j)}(P_iP_j-P_jP_i)\,i\sigma_k^{(1)}.
\end{aligned}$$

Dans le cas où il existe un potentiel vecteur **A** auquel correspond un champ magnétique **H**, nous avons

$$P_iP_j-P_jP_i=i\hbar\varepsilon(\partial_iA_j-\partial_jA_i)=i\hbar\varepsilon H_k$$

et, par suite,

$$(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)=\mathbf{P}^2+\varepsilon\hbar(\mathbf{H}.\vec{\sigma}_1).\qquad(5)$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)\\
&\quad=2\sum_i P_i^2\sigma_i^{(1)}\sigma_i^{(2)}+\sum_{i,j,i\neq j}P_iP_j[\sigma_i^{(1)}\sigma_j^{(2)}+\sigma_j^{(2)}\sigma_i^{(1)}].
\end{aligned}$$

Nous introduisons les matrices [3] du spin $\hbar$

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)}\right)\qquad(6)$$

et les matrices de leur système

$$\left.\begin{aligned}
S_{i,i}&=\sigma_i^{(1)}\sigma_i^{(2)},\\
S_{i,j}&=\frac{1}{2}(\sigma_i^{(1)}\sigma_j^{(2)}+\sigma_j^{(1)}\sigma_i^{(2)}).
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big[(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)\Big]\\
&\quad=\sum_i P_i^2S_{i,i}+\sum_{i,j,i\neq j}P_iP_jS^{i,j}=\sum_{i,j}P_iP_jS^{i,j},\qquad(8)\\
&\frac{1}{2}\Big[(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_1)+(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)(\mathbf{P}.\vec{\sigma}_2)\Big]\\
&\quad=\mathbf{P}^2+\varepsilon\hbar(\mathbf{H}.\mathbf{S}).\qquad(9)
\end{aligned}$$

[3] G. Petiau, *C. R. Acad. Sc.*, 1941, **213**, p. 863.

Reportant (8) et (9) dans (4), ce système s'écrit

$$\left.\begin{aligned}
&P_0\varphi_{11}+\frac{1}{2m_0c}[\mathbf{P}^2+\varepsilon\hbar(\mathbf{H}.\mathbf{S})]\varphi_{11}+m_0c\,\varphi_{11}\\
&\qquad-\frac{1}{2m_0c}\Big(\sum_{i,j}P_iP_jS^{i,j}\Big)\varphi_{22}=0,\\
&P_0\varphi_{22}-\frac{1}{2m_0c}[\mathbf{P}^2+\varepsilon\hbar(\mathbf{H}.\mathbf{S})]\varphi_{22}-m_0c\,\varphi_{22}\\
&\qquad+\frac{1}{2m_0c}\Big(\sum_{i,j}P_iP_jS^{i,j}\Big)\varphi_{11}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Remarquons que nous avons

$$(\mathbf{P}.\mathbf{S})^2=\frac{1}{2}\mathbf{P}^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j}P_iP_jS^{i,j}+\frac{\hbar\varepsilon}{2}(\mathbf{H}.\mathbf{S})\qquad(11)$$

de telle sorte que, dans (10), nous pouvons également remplacer $\sum_{i,j}P_iP_jS^{i,j}$ par

$$2(\mathbf{P}.\mathbf{S})^2-\mathbf{P}^2-\hbar\varepsilon(\mathbf{H}.\mathbf{S}).\qquad(12)$$

Nous introduisons maintenant les fonctions d'ondes $\psi_{m_1,m_2;k}$ avec $k=1,\ 2,\ m_1,\ m_2=1,\ 2,$ telles que

$$\psi_{m_1,m_2;1}=\varphi_{11},\qquad\psi_{m_1,m_2;2}=\varphi_{22}.\qquad(13)$$

Remarquant que

$$\rho_3=\begin{vmatrix}1&\\&-1\end{vmatrix},\qquad\rho_3\rho_1=\begin{vmatrix}&1\\-1&\end{vmatrix},$$

le système (10) s'écrit

$$\Big\{P_0+\rho_3\Big[\frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2+m_0c+\frac{\varepsilon\hbar}{2m_0c}(\mathbf{H}.\mathbf{S})\Big]-\rho_3\rho_1\frac{1}{2m_0c}\Big(\sum_{i,j}P_iP_jS^{i,j}\Big)\Big\}\psi=0.\qquad(14)$$

Cette équation n'étant pas hermitienne ($\rho_3\rho_1$ est antihermitien), nous la multiplions par ρ_3 et nous obtiendrons ainsi l'équation d'ondes mésique

$$\Big\{P_0\rho_3+\frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2+m_0c+\frac{\varepsilon\hbar}{2m_0c}(\mathbf{H}.\mathbf{S})-\rho_1\frac{1}{2m_0c}\Big(\sum_{i,j}P_iP_jS^{i,j}\Big)\Big\}\psi=0.\qquad(15)$$

Tenant compte de (12), nous pouvons également l'écrire sous la forme

$$\Big\{P_0\rho_3+\frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2(1+\rho_1)+m_0c-\frac{\rho_1}{m_0c}(\mathbf{P}.\mathbf{S})^2+\frac{\varepsilon\hbar}{2m_0c}(1+\rho_1)(\mathbf{H}.\mathbf{S})\Big\}\psi=0.\qquad(16)$$

Les équations (15) ou (16) sont des systèmes de huit équations d'ondes. Le système des matrices **S** n'étant pas irréductible il en est de même de ces systèmes d'équations.

On sait qu'après réduction, le système des matrices **S** se ramène à un système formé de neuf matrices linéairement indépendantes, donc du troisième rang et en un système de rang 1. Par suite, le système d'équation (15) [ou (16)] se décomposera en deux systèmes irréductibles, l'un formé de six équations, l'autre de deux.

Avec la représentation considérée des matrices $\vec{\sigma}$, d'où des matrices **S** on passera du système réductible des matrices **S** aux systèmes irréductibles par une transformation canonique U telle que l'on ait

$$S'_i = U S_i U^{-1},$$

U étant une matrice rectangulaire 3×4 dans la première représentation, 1×4 dans la seconde.

On voit facilement que, pour la première représentation, nous devons poser

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad U^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

ce qui, à partir des matrices (6), soient

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} & 1 & 1 & \\ 1 & & & 1 \\ 1 & & & 1 \\ & 1 & 1 & \end{vmatrix}, \\ S_2 &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} & i & i & \\ -i & & & i \\ -i & & & i \\ & -i & -i & \end{vmatrix}, \\ S_3 &= \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{vmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

nous donne les matrices réduites

$$\left.\begin{aligned} S'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{vmatrix}, \\ S'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} & i & \\ -i & & i \\ & -i & \end{vmatrix}, \\ S'_3 &= \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{vmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Les matrices S_i, $S_{i,j}$ étant ici de rang 3 il y a six fonctions ψ dans cette représentation.

Nous passons également à la représentation de rang 1 du système des matrices **S** par la matrice

$$\left.\begin{aligned} U &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}, \\ U^{-1} &= \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ce qui nous donne

$$S'_i = 0, \qquad S'_{i,j} = 0 \quad (i \neq j), \qquad S'_{i,i} = -1. \tag{21}$$

Nous avons alors seulement deux fonctions ψ.

Dans ce dernier cas, on voit immédiatement que le système (15) se simplifie et s'écrit

$$\left[P_0\rho_3 + \frac{1}{2m_0c}(1+\rho_1)\mathbf{P}^2 + m_0c\right]\psi = 0, \tag{22}$$

car, d'après (21),

$$\sum_{i,j} P_i P_j S^{i,j} = -\mathbf{P}^2. \tag{23}$$

Tout terme de spin a disparu de cette équation et le corpuscule n'est plus caractérisé que par le système des matrices $\vec{\rho}$.

Nous allons examiner ce système et montrer qu'il correspond au cas du méson scalaire (ou pseudoscalaire).

Développé en mettant en évidence les fonctions ψ_1 et ψ_2, le système (22) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \left(P_0 + \frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2 + m_0c\right)\psi_1 + \frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2\psi_2 &= 0, \\ \left(P_0 - \frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2 - m_0c\right)\psi_2 - \frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2\psi_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Nous pouvons retrouver des équations analogues en faisant la même élimination des fonctions d'ondes non évolutives à partir des équations d'ondes du méson scalaire (ou pseudoscalaire) écrites sous la forme d'équations de champs.

Dans ce cas, $\mathcal{J}$ étant un invariant, $\mathcal{A}_0$, $\vec{\mathcal{A}}$ un quadrivecteur (ou un pseudo-invariant, et un pseudovecteur), les équations d'ondes du corpuscule s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} P_0\mathcal{J} + m_0c\mathcal{A}_0 &= 0, \\ \mathbf{P}\mathcal{J} - m_0c\vec{\mathcal{A}} &= 0, \\ P_0\mathcal{A}_0 + \left(\mathbf{P}.\vec{\mathcal{A}}\right) + m_0c\mathcal{J} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

L'élimination de $\vec{\mathcal{A}}$ qui n'évolue pas directement donne immédiatement

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{m_0c}\mathbf{P}\mathcal{J}, \tag{26}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} P_0\mathcal{A}_0 + \frac{1}{m_0c}\mathbf{P}^2\mathcal{J} + m_0c\mathcal{J} &= 0, \\ P_0\mathcal{J} + m_0c\mathcal{A}_0 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Posant

$$\psi_1 = \frac{\mathcal{J} + \mathcal{A}_0}{2}, \qquad \psi_2 = \frac{\mathcal{J} - \mathcal{A}_0}{2}, \tag{28}$$

par addition et soustraction de (27), nous retrouvons les équations (24) ou (22) ce qui met en évidence le caractère d'hermiticité de l'équation d'onde. L'équation (22) montre notamment la nécessité de l'introduction de ρ_3 devant P_0 et, par suite, des valeurs propres $+1$ et -1 de la densité de présence.

Dans le cas de la représentation de rang 3 des matrices **S**, nous pouvons également nous ramener aux formes connues déduites des équations de champs du méson vectoriel.

Nous remplacerons ici les six fonctions ψ_1, ψ_2 par les composantes d'espace de deux vecteurs en effectuant, par le procédé de la théorie du photon, des combinaisons linéaires sur les $\psi_{m_1,m_2;k}$.

Nous écrirons ici

$$\vec{\psi}_k = \left(\eta \vec{\sigma}\right)_{l_2 l_1} \psi_{l_1 l_2;k} \quad (k = 1, 2), \tag{29}$$

η étant une matrice telle que

$$\eta = -\eta^+ = \eta^{-1}, \qquad \vec{\sigma}^+ = -\eta \vec{\sigma} \eta^{-1}. \tag{30}$$

Avec la représentation adoptée ici pour les matrices $\vec{\sigma}$, nous avons $\eta = \sigma_2$.

Le système (15) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\Big(P_0\rho_3 + \frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2 + m_0c\Big)\vec{\psi} \\ - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m_0c}\left(\mathbf{H}\wedge\vec{\psi}\right) \\ - \frac{\rho_1}{2m_0c}\Big[\mathbf{P}^2.\vec{\psi} - 2\mathbf{P}\left(\mathbf{P}.\vec{\psi}\right) - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m_0c}\left[\mathbf{H}\wedge\vec{\psi}\right]\Big] = 0\end{aligned} \tag{31}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\Big(P_0\rho_3 + \frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2 + m_0c\Big)\vec{\psi} \\ - \frac{\rho_1}{2m_0c}\left[\mathbf{P}^2.\vec{\psi} - 2\mathbf{P}\left(\mathbf{P}.\vec{\psi}\right)\right] \\ - \frac{i\hbar\varepsilon}{2m_0c}(1-\rho_1)\left[\mathbf{H}\wedge\vec{\psi}\right] = 0.\end{aligned} \tag{32}$$

Ce système est à rapprocher de celui que l'on obtient par l'élimination des composantes non évolutives dans les équations du méson vectoriel.

Ces équations s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}P_0\vec{\mathcal{A}} - \mathbf{P}\mathcal{V} - m_0c\vec{\mathcal{E}} = 0, \\ \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{m_0c}\left[\mathbf{P}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right], \\ P_0\vec{\mathcal{E}} + \left[\mathbf{P}\wedge\vec{\mathcal{H}}\right] - m_0c\vec{\mathcal{A}} = 0, \\ \mathcal{V} = \frac{1}{m_0c}\left(\mathbf{P}.\vec{\mathcal{E}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

L'élimination de $\mathcal{V}$ et de $\vec{\mathcal{H}}$ donne alors

$$\left.\begin{aligned}P_0\vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{m_0c}\mathbf{P}\left(\mathbf{P}.\vec{\mathcal{E}}\right) - m_0c\vec{\mathcal{E}} = 0, \\ P_0\vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{m_0c}\left[\mathbf{P}\wedge\left[\mathbf{P}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right]\right] - m_0c\vec{\mathcal{A}} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

or,

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{P}\wedge\left[\mathbf{P}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right]\right] \\ = -\mathbf{P}^2.\vec{\mathcal{A}} + \mathbf{P}\left(\mathbf{P}.\vec{\mathcal{A}}\right) + i\hbar\varepsilon\left[\mathbf{H}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right],\end{aligned} \tag{35}$$

ce qui ramène le système (35) à la forme

$$\begin{aligned}P_0\vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{m_0c}\mathbf{P}\left(\mathbf{P}.\vec{\mathcal{E}}\right) - m_0c\vec{\mathcal{E}} = 0, \\ P_0\vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{m_0c}P^2\vec{\mathcal{A}} + \frac{1}{m_0c}\mathbf{P}\left(\mathbf{P}.\vec{\mathcal{A}}\right) \\ + \frac{i\hbar\varepsilon}{m_0c}\left[\mathbf{H}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right] - m_0c\vec{\mathcal{A}} = 0.\end{aligned} \tag{36}$$

Posant

$$\vec{\psi}_1 = \frac{\vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{A}}}{2}, \qquad \vec{\psi}_2 = \frac{\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{A}}}{2},$$

par addition et soustraction des deux équations (36), introduisant les matrices ρ_1 et ρ_3, nous obtenons à nouveau le système (32).

Nous avons donc mis en évidence, à partir des équations (15) ou (16), le passage aux formes irréductibles et montré leur correspondance avec les systèmes représentant les mésons scalaires ou vectoriels écrits sous forme d'équations de champs.

2. Le système (15) ou (16) introduit un opérateur hamiltonien pour le corpuscule.

En effet, nous écrivons cette équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_3\psi = \frac{ic}{\hbar}\mathcal{H}\psi, \tag{37}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = -\Big[\varepsilon V\rho_3 + \frac{\mathbf{P}^2}{2m_0c}(1+\rho_1) + m_0c \\ - \frac{\rho_1}{m_0c}(\mathbf{P}.\mathbf{S})^2 + \frac{\hbar\varepsilon}{2m_0c}(1+\rho_1)(\mathbf{H}.\mathbf{S})\Big].\end{aligned} \tag{38}$$

A partir de cette équation, nous pouvons définir la dérivée d'une grandeur représentée par un opérateur C ou $C\rho_3$ (si C et ρ_3 commutent, $iC\rho_3$, si C et ρ_3 anticommutent).

Si C ne contient pas explicitement le temps, nous avons ainsi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \psi^* C\psi\,\mathrm{d}\tau = \frac{ic}{\hbar}\int \psi^*(C\rho_3\mathcal{H} - \mathcal{H}\rho_3 C)\psi\,\mathrm{d}\tau, \tag{39}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \psi^*\rho_3 C\psi\,\mathrm{d}\tau = \frac{ic}{\hbar}\int \psi^*(C\mathcal{H} - \mathcal{H}C)\psi\,\mathrm{d}\tau. \tag{40}$$

Il en résulte que nous pouvons considérer deux définitions pour une grandeur intégrale première.

1° C est intégrale première si

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \psi^*\rho_3 C\psi\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{ou} \quad C\mathcal{H} - \mathcal{H}C = 0 \\ (\rho_3 \text{ et } C \text{ commutant}).\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

2° C est intégrale première si

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \psi^* C\psi\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{ou} \quad C\rho_3\mathcal{H} - \mathcal{H}\rho_3 C = 0. \tag{42}$$

$\mathcal{H}$ dépendant explicitement de ρ_1 ne commute pas avec ρ_3 et, par suite, ces deux définitions sont distinctes. Toutefois, la première de ces définitions semble mieux en accord avec le formalisme général de la théorie du corpuscule de spin $\hbar$ et nous allons en examiner quelques applications.

Considérons la grandeur « position » représentée par l'opérateur $\mathbf{x}$. Nous en déduisons la grandeur « vitesse » par la dérivation

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\int \psi^* \rho_3 \mathbf{x} \psi \, d\tau$$
$$= \frac{ic}{\hbar}\int \psi^* \Big[\frac{1}{2 m_0 c}(\mathbf{P}^2 . \mathbf{x} - \mathbf{x} . \mathbf{P}^2)$$
$$- \frac{\rho_1}{2 m_0 c} S^{i,j}(P_i P_j \mathbf{x} - \mathbf{x} P_i P_j)\Big] \psi \, d\tau,$$

d'où

$$\dot{x}_i = -\frac{1}{m_0}\int \psi^* \Big(P_i - \rho_1 \sum_j P_j S_{i,j}\Big)\psi \, d\tau. \quad (43)$$

Par suite, nous sommes amenés à considérer l'opérateur

$$-\frac{1}{m_0}\Big(P_i - \rho_1 \sum_j P_j S_{i,j}\Big) \quad (44)$$

comme correspondant à la grandeur (ρv_i) (ρ densité de présence représentée par l'opérateur ρ_3 qui est intégrale première, car l'on a, pour ρ_3, $C = 1$, $1 . \mathcal{H} - \mathcal{H} . 1 = 0$). ρ_3 possédant la valeur propre -1 pour les états voisins du repos, on retrouve l'expression classique de la vitesse, mais dans le cas général, à la vitesse classique $\frac{\mathbf{P}}{m_0}$ s'ajoute un terme supplémentaire dépendant du tenseur $S_{i,j}$ (appelé « gyroscopique » par certains auteurs).

L'expression (44) de $\dot{\mathbf{x}}$ se simplifie particulièrement dans le cas de la représentation de spin zéro (rang 2).

On a alors

$$\dot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{m_0}\mathbf{P}(1 + \rho_1) \quad (45)$$

et, par suite, la densité correspondante s'écrira

$$\dot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{m_0}(\psi_1^* + \psi_2^*)\mathbf{P}(\psi_1 + \psi_2) = -\frac{1}{m_0}\mathcal{J}^* \mathbf{P} \mathcal{J}. \quad (46)$$

A partir de la définition (41) de l'intégrale première, nous pouvons préciser la représentation de la grandeur spin et justifier l'attribution du spin zéro et $\hbar$ aux deux représentations irréductibles du système des équations d'ondes.

Nous considérons l'opérateur « moment orbital », soit

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} \quad (47)$$

et nous calculons le commutateur

$$L \mathcal{H} - \mathcal{H} L,$$

avec, pour $\mathcal{H}$, l'expression (38) en l'absence de champ extérieur ($V = 0$, $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{H} = 0$).

Nous voyons facilement que

$$(\mathbf{p}.\mathbf{S})^2 \mathbf{L} - \mathbf{L}(\mathbf{p}.\mathbf{S})^2$$
$$= i\hbar[(\mathbf{p} \wedge \mathbf{S})(\mathbf{p}.\mathbf{S}) - (\mathbf{p}.\mathbf{S})(\mathbf{p} \wedge \mathbf{S})]$$
$$= -[(\mathbf{p}.\mathbf{S})^2 \mathbf{S} - \mathbf{S}(\mathbf{p}.\mathbf{S})^2]. \quad (48)$$

On en déduit que si $\mathbf{S} \neq 0$, $\mathbf{L}$ n'est pas intégrale première, mais que

$$\frac{d}{dt}\int \psi^* \rho_3 (\mathbf{L} + \hbar \mathbf{S})\psi \, d\tau = 0. \quad (49)$$

Le spin est donc représenté par l'opérateur $\hbar\mathbf{S}$ et possède les valeurs propres 0, $\pm\hbar$ dans la représentation de rang 3 [matrices (19)] des matrices $\mathbf{S}$. Il est nul dans la représentation de rang 1 pour laquelle ces matrices disparaissent, alors le spin est nul et le moment orbital est intégrale première.

3. Certaines propriétés de l'équation d'ondes et de ses solutions apparaissent facilement à partir de l'équation (16).

Considérons d'abord le cas de l'absence de champ extérieur.

On sait que, dans ce cas, les fonctions Φ, solutions de l'équation (1), satisfont à l'équation des ondes. Il en est de même *a priori* pour les ψ qui ne sont que certains des Φ. Toutefois, la démonstration de cette propriété est plus directe à partir de (16).

En l'absence de champ extérieur, nous écrivons cette équation

$$\Big[p_0 \rho_3 + \frac{\mathbf{p}^2}{2 m_0 c}(1 + \rho_1) + m_0 c\Big]\psi = \frac{\rho_1}{m_0 c}(\mathbf{p}.\mathbf{S})^2 \psi. \quad (50)$$

Par multiplication par $\frac{\rho_1}{m_0 c}(\mathbf{p}.\mathbf{S})^2$ et utilisant les relations opératorielles

$$(\mathbf{p}.\mathbf{S})^4 = \mathbf{p}^2(\mathbf{p}.\mathbf{S})^2; \qquad (1 + \rho_1)^2 = 2(1 + \rho_1), \quad (51)$$

nous obtenons, après réduction, l'équation des ondes

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m_0^2 c^2)\psi = 0. \quad (52)$$

On peut chercher à étendre ce résultat au cas d'un champ extérieur caractérisé par un potentiel scalaire V, indépendant du temps tel que

$$\operatorname{div} V = 0, \qquad \Delta V = 0.$$

Nous remplaçons alors, dans (50), p_0 par $P_0 + \varepsilon V$ et par le même procédé que précédemment nous obtenons, toutes réductions faites, l'équation

$$\Big\{ -P_0^2 + \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2$$
$$+ \frac{i\hbar\varepsilon}{m_0 c}\rho_3(1 + \rho_1)(\operatorname{grad} V . \mathbf{p})$$
$$- \frac{i\hbar\varepsilon}{m_0 c}\rho_3 \rho_1 [(\mathbf{p}.\mathbf{S})(\mathbf{S} \operatorname{grad} V)$$
$$+ (\mathbf{S} \operatorname{grad} V)(\mathbf{p}.\mathbf{S})]\Big\}\psi = 0, \quad (53)$$

dont le dernier terme s'écrit encore

$$-\frac{\hbar\varepsilon}{m_0 c}\rho_2 \Big\{\sum_{i,j}\Big[(\partial_i V)p_j + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}\Big] S^{i,j}\Big\}. \quad (54)$$

L'équation (53) n'est pas hermitienne et ne le devient pas par multiplication par ρ_3. Par suite, elle ne peut s'interpréter physiquement d'une façon

simple comme c'est le cas pour l'équation d'ondes de Dirac.

Toutefois, (53) se simplifie dans le cas de la représentation de spin zéro pour laquelle nous obtenons

$$\left[-P_0^2+\mathbf{p}^2+m_0^2c^2 + \frac{i\hbar\varepsilon}{m_0c}(\rho_3+\rho_3\rho_1)(\operatorname{grad}V.\mathbf{p})\right]\psi=0. \quad (55)$$

Dans ce cas, la définition des ondes tensorielles nous donne

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{J} &= \sum_{i,k}(\rho_0)_{ik}\psi_k = \sum_{i,k}(\rho_1)_{ik}\psi_k;\\ \mathfrak{A}_0 &= \sum_{i,k}(\rho_3)_{ik}\psi_k = -\sum_{i,k}(\rho_3\rho_1)_{i,k}\psi_k, \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

d'où immédiatement

$$\left.\begin{aligned} (-P_0^2+\mathbf{p}^2+m_0^2c^2)\mathcal{J}&=0,\\ (-P_0^2+\mathbf{p}^2+m_0^2c^2)\mathfrak{A}_0+\frac{2i\hbar\varepsilon}{m_0c}(\operatorname{grad}V.\mathbf{p})\mathcal{J}&=0. \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

L'équation (52) nous montre qu'en l'absence de champ extérieur les équations d'ondes (15) possèdent des solutions ondes planes monochromatiques de telle sorte que l'on peut écrire

$$\psi = a\,e^{\frac{i}{\hbar}[Wt-(\mathbf{p}.\mathbf{x})]}+b\,e^{\frac{i}{\hbar}[-Wt-(\mathbf{p}.\mathbf{x})]}=\psi^+ + \psi^-. \quad (58)$$

Pour l'onde ψ^+ l'équation (15) donne

$$\left(\frac{W}{c}\rho_3+m_0c\right)^2 a-\rho_1\left(\sum_{i,j}p_ip_jS^{i,j}\right)a=0. \quad (59)$$

Introduisant trois constantes C_m telles que $C^*C=1$, et normalisant par la condition

$$\int_v a^*\rho_3 a\,d\tau=-1, \quad (60)$$

on obtient immédiatement la solution normée ψ^+ sous la forme

$$\left.\begin{aligned} a_{1,l}&=\frac{\sum_{i,j}(p_ip_jS^{i,j})_{lm}C_m}{2\left(\frac{W}{c}+m_0c\right)\sqrt{m_0Wv}},\\ a_{2,l}&=\frac{\left(\frac{W}{c}+m_0c\right)^2\delta_{lm}C_m}{2\left(\frac{W}{c}+m_0c\right)\sqrt{m_0Wv}}. \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

De même pour les amplitudes b de l'onde à énergie négative ψ^-, normée à la valeur $+1$, le système

$$\left(-\frac{W}{c}\rho_3+m_0c\right)^2 b-\rho_1\left(\sum_{i,j}p_ip_jS^{i,j}\right)b=0 \quad (62)$$

nous donne, les D_m étant trois constantes telles que

$$\left.\begin{aligned} &D_m^*D_m=1;\\ b_{1,l}&=\frac{\left(\frac{W}{c}+m_0c\right)^2\delta_{lm}D_m}{2\left(\frac{W}{c}+m_0c\right)\sqrt{m_0Wv}};\\ b_{2,l}&=\frac{\left(\sum_{i,j}p_ip_jS^{i,j}\right)_{lm}D_m}{2\left(\frac{W}{c}+m_0c\right)\sqrt{m_0Wv}}. \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Si nous écrivons

$$L_{m_1,m_2;k,l}=\left(-P_0\rho_3+\frac{1}{2m_0c}\mathbf{p}^2+m_0c + \frac{\rho_1}{2m_0c}\sum_{i,j}p_ip_jS^{i,j}\right)_{m_1,m_2;k,l}, \quad (64)$$

les indices k, l correspondant aux matrices ρ, les indices m_1, m_2 aux matrices $S^{i,j}$, l'onde plane d'impulsion $\mathbf{p}$ générale s'écrit

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^+_{m_1,k}+\psi^-_{m_1,k}\\ &=\left\{[L]_{m_1,m_2;k,2}C_{m_2}e^{\frac{i}{\hbar}Wt} + [L]_{m_1,m_2;k,1}D_{m_2}e^{-\frac{i}{\hbar}Wt}\right\}\\ &\quad\times\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}.\mathbf{x})}}{\left(\frac{W}{c}+m_0c\right)\sqrt{\frac{W}{m_0c}v}}. \end{aligned} \quad (65)$$

4. Nous allons maintenant examiner les actions possibles de champs de forces de diverses variances tensorielles sur le corpuscule considéré. Nous discuterons ensuite les conditions de l'élimination des fonctions d'ondes non évolutives dans quelques-uns des cas que nous serons amenés à considérer.

Pour examiner les divers types d'interactions auxquelles peut être soumis le corpuscule de spin 0 ou $\hbar$, nous passerons d'abord de la forme (1) de l'équation d'ondes à la forme d'univers correspondante.

Posant

$$x^4=ict,\qquad i\alpha_4\alpha_p=\gamma_p,\qquad \alpha_4=\gamma_4;$$

$$\mu=1,2,3,4,\qquad p_\mu=i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

par multiplication de (1) par $i\alpha_4^{(1)}\alpha_4^{(2)}$, nous obtenons immédiatement

$$\left\{p_\mu\frac{1}{2}[(\gamma^\mu)_{i_1m_1}(\gamma^0)_{i_2m_2}+(\gamma^0)_{i_1m_1}(\gamma^\mu)_{i_2m_2}] + im_0c\,\delta_{i_1m_1}\delta_{i_2m_2}\right\}\Phi_{m_1m_2}=0 \quad (66)$$

ou

$$(p_\mu\Gamma^\mu+im_0c)\Phi=0. \quad (67)$$

Les quatre matrices Γ^μ (que nous écrivons encore $\Gamma^{\mu,0}$) appartiennent à un système de

136 matrices de forme générale

$$\Gamma^{A,B} = \Gamma^{B,A} = \frac{1}{2}\left[\gamma^{A}_{(1)}\gamma^{B}_{(2)} + \gamma^{B}_{(1)}\gamma^{A}_{(2)}\right], \qquad (68)$$

les γ^{A}, γ^{B}, ... désignant l'une quelconque des 16 matrices de Dirac :

$$\gamma^{A} = \gamma^{0}, \quad \gamma^{\mu}, \quad \gamma^{[\mu\nu]}, \quad \gamma^{[\mu\nu\rho]}, \quad \gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]} = \gamma^{5}. \qquad (69)$$

Pour déterminer les couplages possibles du corpuscule avec un champ de variance tensorielle donnée, nous devons chercher parmi les matrices $\Gamma^{A,B}$, celles qui, associées d'une façon covariante aux composantes du champ, permettent de construire des invariants qui introduits dans les équations (74) ou (75) représenteront la masse propre localisée dans le couplage champ-corpuscule.

Considérons d'abord un champ vectoriel caractérisé par un potentiel vecteur A_{μ}.

Nous devons chercher parmi les matrices du système $\Gamma^{A,B}$ les ensembles de quatre matrices ayant la variance tensorielle de vecteurs.

Nous trouvons immédiatement quatre de ces matrices :

$$\Gamma^{\mu,0}, \quad \Sigma_{\nu}\Gamma^{[\mu\nu]}{}_{,\nu}, \quad \Sigma_{[\nu\rho]}\Gamma^{[\mu\nu\rho]}{}_{,[\nu\rho]}, \quad \Gamma^{5}{}_{,\mu 5} = \Gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}{}_{,[\nu\rho\sigma]}. \qquad (70)$$

Par suite, l'invariant le plus général construit avec le vecteur A_{μ} s'écrira

$$A_{\mu}[g_1\Gamma^{\mu,0} + g_2\Sigma_{\nu}\Gamma^{[\mu\nu]}{}_{,\nu} + g_3\Sigma_{[\nu\rho]}\Gamma^{[\mu\nu\rho]}{}_{,[\nu\rho]} + g_4\Gamma^{5}{}_{,\mu 5}], \qquad (71)$$

g_1, g_2, g_3, g_4 désignant quatre constantes.
Toutefois, on peut se demander si les quatre matrices vecteurs (70) sont linéairement indépendantes. Cette indépendance est réalisée en général; toutefois, nous allons montrer que la réduction du système des Γ^{μ} à l'une de ses représentations d'ordre 5 (mésons de spin zéro) ou 10 (méson de spin $\hbar$) ramène les quatre matrices-vecteurs à deux d'entre elles.

Pour cela, il sufit de se reporter à la discussion de la réductibilité des systèmes de matrices Γ^{μ} que nous avons étudiée en détail dans d'autres publications et notamment dans un article de la *Revue Scientifique* (1945, 83, p. 67-74).

Nous avons montré que ces représentations sont caractérisées par les valeurs prises par deux commutateurs.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \Sigma_{\mu}\Gamma_{\mu,\mu} - \Sigma_{[\mu\nu]}\Gamma_{[\mu\nu],[\mu\nu]}, \\ \mathcal{C}_2 &= \Sigma_{[\mu\nu\rho]}\Gamma_{[\mu\nu\rho],[\mu\nu\rho]} - \Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma],[\mu\nu\rho\sigma]}, \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

qui, dans la représentation de rang 5, prennent les valeurs

$$\mathcal{C}_1 = -2, \qquad \mathcal{C}_2 = +3 \qquad (73)$$

et dans la représentation de rang 10 les valeurs

$$\mathcal{C}_1 = 2, \qquad \mathcal{C}_2 = -1. \qquad (74)$$

A partir de ces commutateurs, on voit immédiatement que, dans la représentation de rang 5,

$$\Gamma_{[\mu\nu\rho],[\nu\rho]} = \Gamma_{\mu}, \qquad \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma,\nu\rho\sigma} = \Gamma_{\mu\sigma,\sigma};$$

d'où

$$\Sigma_{[\nu\rho]}\Gamma_{[\mu\nu\rho]}{}^{,[\nu\rho]} = 3\Gamma_{\mu}, \qquad \Sigma_{\nu}\Gamma_{[\mu\nu]}{}^{,\nu} = 3\Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]}{}^{,[\nu\rho\sigma]}.$$

De même, dans le cas de la représentation de rang 10, on a

$$\Sigma_{[\nu\rho]}\Gamma_{[\mu\nu\rho]}{}^{,[\nu\rho]} = -\Gamma_{\mu}; \qquad \Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]}{}^{,[\nu\rho\sigma]} = -\Sigma_{\nu}\Gamma_{[\mu\nu]}{}^{,\nu}.$$

Dans l'une ou l'autre de ces représentations, il nous reste donc seulement deux matrices-vecteurs indépendantes. Le corpuscule pourra donc être couplé avec deux potentiels vecteurs A_{μ} et B_{μ} (pouvant d'ailleurs être identiques) et l'interaction vectorielle la plus générale s'écrit

$$g_1 A_{\mu}\Gamma^{\mu} + g_2 B_{\mu}\Gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}{}_{,\nu\rho\sigma}. \qquad (75)$$

ou encore en variables d'espace temps

$$\begin{aligned} H^{(1)} = \; & g_1\left\{ A_0\frac{1}{2}\left(\alpha_0^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_5^{(1)}\alpha_0^{(2)}\right) \right. \\ & \left. - \left[\mathbf{A}\frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_5^{(1)}\vec{\alpha}^{(2)}\right)\right]\right\} \\ & + g_2\left\{ B_0\frac{1}{2}\left(\sigma_0^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_5^{(1)}\sigma_0^{(2)}\right) \right. \\ & \left. - \left[\mathbf{B}\frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_5^{(2)}\vec{\sigma}^{(1)}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \qquad (76)$$

Nous avons posé ici

$$\sigma_0 = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \qquad \vec{\sigma} = \frac{i}{2}\left(\vec{\alpha}\wedge\vec{\alpha}\right) \qquad (\alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4). \qquad (77)$$

Avec un champ tensoriel antisymétrique du second ordre (tel qu'un champ électromagnétique ou un champ mésique vectoriel) soit $F_{[\mu\nu]}$, nous pouvons associer trois matrices tenseurs antisymétriques du second ordre, soient

$$\Gamma_{[\mu\nu]} = \Gamma_{[\mu\nu],0}, \quad \Sigma_{\rho}\Gamma_{[\mu\nu\rho]}{}^{,\rho}, \quad \Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]}{}^{,[\rho\sigma]}. \qquad (78)$$

Mais, dans le cas de la représentation de rang 5, on montre facilement que l'on a

$$\Sigma_{\rho}\Gamma_{[\mu\nu\rho]}{}^{,\rho} = -2\Gamma_{[\mu\nu]}, \qquad \Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]}{}^{,[\rho\sigma]} = \Gamma_{[\mu\nu]},$$

tandis que, dans le cas de la représentation de rang 10, la seule relation de ce type que l'on obtient s'écrit

$$\Sigma_{\rho}\Gamma_{[\mu\nu\rho]}{}^{,\rho} - \Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]}{}^{,[\rho\sigma]} = \Gamma_{[\mu\nu]}.$$

Par suite dans le cas du méson de spin zéro (représentation de rang 5) il n'y a qu'un seul couplage possible avec un champ tensoriel antisymétrique du second ordre, soit

$$f_1 F_{[\mu\nu]}\Gamma^{[\mu\nu]}. \qquad (79)$$

tandis que dans le cas du méson de spin $\hbar$ (représentation de rang 10), il y a deux couplages possibles de ce type, soient

$$f_1 F_{[\mu\nu]}\Gamma^{[\mu\nu]} + f_2 G_{[\mu\nu]}\Gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}{}_{,[\rho\sigma]}. \qquad (80)$$

Avec un champ invariant (tel que l'invariant du champ mésique scalaire) nous pouvons associer

cinq matrices invariantes

$$1=\Gamma^0,\quad \Sigma_\mu \Gamma_{\mu,}{}^{\mu},\quad \Sigma_{[\mu\nu]}\Gamma_{[\mu\nu],}{}^{[\mu\nu]},\quad \Sigma\Gamma_{[\mu\nu\rho],}{}^{[\mu\nu\rho]},\quad \Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma],}{}^{[\mu\nu\rho\sigma]}=\Gamma_{5,}{}^{5}. \tag{81}$$

Mais dans la représentation de rang 5 on a, d'après (73)

$$\begin{aligned}\Sigma_\mu \Gamma_{\mu,}{}^{\mu} &= \Gamma_0+3\Gamma_{5,}{}^{5},\\ \Sigma_{[\mu\nu]}\Gamma_{[\mu\nu],}{}^{[\mu\nu]} &= 3\Gamma_0+3\Gamma_{5,}{}^{5},\\ \Sigma_{[\mu\nu\rho]}\Gamma_{[\mu\nu\rho],}{}^{[\mu\nu\rho]} &= 3\Gamma_0-\Gamma_{5,}{}^{5}.\end{aligned}$$

De même dans le cas de la représentation de rang 10 on a immédiatement

$$\begin{aligned}\Sigma_\mu \Gamma_{\mu,}{}^{\mu} &= \Gamma_0-\Gamma_{5,}{}^{5},\\ \Sigma_{[\mu\nu]}\Gamma_{[\mu\nu],}{}^{[\mu\nu]} &= -\Gamma_0-\Gamma_{5,}{}^{5},\\ \Sigma_{[\mu\nu\rho]}\Gamma_{[\mu\nu\rho],}{}^{[\mu\nu\rho]} &= \Gamma_{5,}{}^{5}-\Gamma_0.\end{aligned}$$

Dans chacune des deux représentations il y aura donc deux couplages possibles avec un champ invariant le terme général de l'interaction de ce type s'écrivant

$$H^{(1)}=g_1 I_{(1)}\Gamma^0+g_2 I_{(2)}\Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma],}{}^{[\mu\nu\rho\sigma]}. \tag{82}$$

Dans le cas de l'interaction pseudoinvariante ou pseudovectorielle, on trouve une seule matrice pseudoinvariante $\Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma],0}$ et deux pseudo-vecteurs équivalents $\Gamma_{[\mu\nu\rho],0}$, $\Gamma_{[\mu\nu\rho\sigma],}{}^{\sigma}$ n'existant que dans le cas de la représentation de rang 10.

Parmi les interactions remarquables auxquelles peut être soumis le corpuscule considéré, nous devons également examiner le cas du couplage avec un champ tensoriel symétrique du second ordre

$$T_{\mu,\nu}=T_{\nu,\mu}.$$

Le système des $\Gamma^{A,B}$ nous permet de construire trois matrices-tenseurs covariantes à $T_{\mu,\nu}$, soient

$$\Gamma^{\mu,\nu},\quad \Sigma_{\rho\neq\mu,\nu}\Gamma^{[\mu\rho],[\nu\rho]},\quad \Gamma^{[\mu\rho\sigma],[\nu\rho\sigma]}. \tag{83}$$

Mais, dans le cas de la représentation de rang 5, on a immédiatement

$$\Sigma_\rho \Gamma_{[\mu\rho],[\nu\rho]}=-2\Gamma_{\mu,\nu},\qquad \Gamma_{[\mu\rho\sigma],[\nu\rho\sigma]}=\Gamma_{\mu,\nu}$$

et dans la représentation de rang 10

$$\Gamma_{\mu,\nu}=\Sigma_{\rho\neq\mu,\nu}\Gamma_{[\mu\rho],[\nu\rho]}-\Gamma_{[\mu\rho\sigma],[\nu\rho\sigma]}.$$

Par suite, dans la représentation de rang 5, nous avons un seul couplage avec un champ tensoriel symétrique du second ordre, soit

$$g_1 T_{\mu,\nu}\Gamma^{\mu,\nu}, \tag{84}$$

tandis que, dans le cas de la représentation de rang 10, nous pourrons avoir deux couplages de ce type, soient

$$g_1 T^{(1)}_{\mu,\nu}\Gamma^{\mu,\nu}+g_2 T^{(2)}_{\mu,\nu}\Gamma^{[\mu\rho\sigma],[\nu\rho\sigma]}. \tag{85}$$

5. Nous allons préciser quelques conséquences de l'introduction de ces divers types d'interaction en examinant plus spécialement le cas du méson scalaire (ou pseudoscalaire) correspondant à la représentation matricielle de rang 5.

Considérons les équations (25), nous les écrivons sous forme matricielle, posant φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, $\varphi_4=\mathcal{A}_0$, $\vec{\mathcal{A}}$, $\mathcal{J}$, désignant par $e^{i,j}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf celui placé à l'intersection de la ligne de rang i et de la colonne de rang j égal à 1.

$$[P_0(e^{40}+e^{04})+\Sigma_p P_p(e^{4p}+e^{p4}) + m_0c(e^{00}-\Sigma e^{pp}+e^{44})]\varphi=0. \tag{86}$$

La matrice-vecteur densité-courant,

$$u_0=e^{40}+e^{04},\qquad u_p=e^{4p}+e^{p4}$$

et la matrice invariante

$$\eta=e^{00}-\Sigma_p e^{pp}+e^{44}$$

définissent un système de 25 matrices linéairement indépendantes comprenant :

1° deux vecteurs d'espace temps

$$u_0,\quad u_p;\qquad v_0=i(e^{40}-e^{04}),\qquad v_p=i(e^{4p}-e^{p4})$$
$$(p=1,2,3);$$

2° un tenseur antisymétrique du second ordre

$$\Pi_p=u_{[0p]}=i(e^{0p}-e^{p0});\qquad \mu_p=u_{[qr]}=i(e^{qr}-e^{rq});$$

3° un tenseur symétrique du second ordre

$$u_{[pq]}=e^{pq}+e^{qp},\qquad u_{0p}=(e^{0p}+e^{p0}),$$
$$u_{00}=e^{00},\qquad u_{pp}=e^{pp};$$

4° deux invariants

$$\eta=e^{00}-\Sigma e^{pp}+e^{44},\qquad \varkappa=e^{44}.$$

Par suite, le corpuscule considéré peut être couplé avec deux champs vectoriels $(A_0, \mathbf{A})$, $(B_0, \mathbf{B})$, un champ tensoriel antisymétrique du second ordre

$$F_{[0p]}=-F_{[p0]}=\mathbf{E},\qquad F_{[pq]}=-F_{[qp]}=H_r,$$

un champ tensoriel symétrique du second ordre $T_{[op]}=T_{[po]}$, $T_{[pq]}=T_{[qp]}$, T_{00}, $T_{[pp]}$, deux invariants I et K.

L'équation (1) dans le champ d'interactions le plus général s'écrit

$$\begin{aligned}\{&P_0u_0+(\mathbf{P}.\mathbf{u})+m_0c\eta\\ &+g_0I\eta+g'_0K\varkappa\\ &+g_1[A_0u_0-(\mathbf{A}.\mathbf{u})]\\ &+g_2[B_0v_0-(\mathbf{B}.\mathbf{v})]\\ &+f_1\left[\left(\mathbf{E}.\vec{\pi}\right)-\left(\mathbf{H}.\vec{\mu}\right)\right]\\ &+f_2[T_{00}u_{00}+\Sigma_{[pq]}T_{[pq]}u_{[pq]}\\ &\qquad -\Sigma_p T_{[op]}u_{[op]}]\ \}\varphi=0.\end{aligned} \tag{87}$$

Revenant de ce système aux fonctions d'ondes $\mathcal{J}$,

$\mathfrak{A}_0$, $\vec{\mathfrak{A}}$ nous écrivons également

$$\left.\begin{aligned}
&(p_0+g_1A_0-ig_2B_0)\mathfrak{J}+(m_0c+g_0I)\mathfrak{A}_0 \\
&\qquad -if_1(\mathbf{E}.\vec{\mathfrak{A}}) - [\text{illegible}]\left[\sum [\text{illegible}]\right]=0, \\
&(\mathbf{p}-g_1\mathbf{A}-ig_2\mathbf{B})\mathfrak{J}-[\text{illegible}]\,\vec{\mathfrak{A}} \\
&\qquad -if_1\mathbf{E}\mathfrak{A}_0-if_1\left(\mathbf{H}\wedge\vec{\mathfrak{A}}\right) \\
&\qquad -[\text{illegible}]\left[\sum [\text{illegible}]\right]=0, \\
&(p_0+g_1A_0+ig_2B_0)\mathfrak{A}_0 \\
&\qquad +\left[(\mathbf{p}-g_1\mathbf{A}-ig_2\mathbf{B})\vec{\mathfrak{A}}\right] \\
&\qquad +(m_0c+g_0I+g'_0K)\mathfrak{J}=0.
\end{aligned}\right\} \quad (88)$$

Nous examinerons d'abord le cas où l'interaction générale introduite ci-dessus est uniquement vectorielle.

Nous introduirons deux vecteurs $(A_0, \mathbf{A})$, $(B_0, \mathbf{B})$ qui peuvent être identiques et deux coefficients ou « charges » g_1 et g_2. Toutefois, nous devons remarquer qu'alors que la densité g_1u_0 se conserve au cours du temps, il n'en est pas de même de la densité g_2v_0.

Nous considérons donc le système (97) réduit à la forme

$$\left.\begin{aligned}
&(p_0+g_1A_0-ig_2B_0)\mathfrak{J}+m_0c\mathfrak{A}_0=0, \\
&(\mathbf{p}-g_1\mathbf{A}+ig_2\mathbf{B})\mathfrak{J}-m_0c\vec{\mathfrak{A}}=0, \\
&(p_0+g_1A_0+ig_2B_0)\mathfrak{A}_0 \\
&\quad +\left[(\mathbf{p}-g_1\mathbf{A}-ig_2\mathbf{B})\vec{\mathfrak{A}}\right]+m_0c\mathfrak{J}=0.
\end{aligned}\right\} \quad (89)$$

L'élimination des composantes $\mathbf{A}$ est immédiate, posant

$$P_0=p_0+g_1A_0, \qquad \mathbf{P}=\mathbf{p}+g_1\mathbf{A},$$

on obtient

$$\left.\begin{aligned}
&(P_0+ig_2B_0)\mathfrak{A}_0 \\
&\quad -\frac{1}{m_0c}(\mathbf{P}^2+g_2^2\mathbf{B}^2-\hbar g_2\operatorname{div}\mathbf{B})\mathfrak{J}+m_0c\mathfrak{J}=0, \\
&\qquad (P_0-ig_2B_0)\mathfrak{J}+m_0c\mathfrak{A}_0=0.
\end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Introduisant les fonctions

$$\psi_1=\frac{\mathfrak{J}+\mathfrak{A}_0}{2}, \qquad \psi_2=\frac{\mathfrak{J}-\mathfrak{A}_0}{2} \quad (91)$$

et les matrices ρ_1, ρ_2, ρ_3 ce système s'écrit généralisant (22),

$$\left[P_0\rho_3-g_2B_0\rho_2-\frac{1}{2m_0c}\times(\mathbf{P}^2+g_2^2\mathbf{B}^2-\hbar g_2\operatorname{div}\mathbf{B})(1+\rho_1)+m_0c\right]\psi=0. \quad (92)$$

Si nous éliminons également $\mathfrak{A}_0$, nous obtenons pour $\mathfrak{J}$ l'équation du second ordre

$$\begin{aligned}
&[\text{illegible}] - \mathbf{p}^2 [\text{illegible}] - \mathbf{A}^2 \\
&-g_2^2(B_0^2-\mathbf{B}^2) \\
&+2g_1[\text{illegible}] - \mathbf{A}.\mathbf{p} \\
&-i\hbar g_1\left([\text{illegible}] - \operatorname{div}\mathbf{A}\right) \\
&-\hbar g_2\left([\text{illegible}] B - \operatorname{div}\mathbf{B}\right) - m_0^2c^2\Big]\mathfrak{J}=0. \quad (93)
\end{aligned}$$

Si $(A_0, \mathbf{A})$, $(B_0, \mathbf{B})$ sont des potentiels électromagnétiques, la quadridivergence nulle des potentiels réduit cette équation à

$$\begin{aligned}
&[\text{illegible}] - \mathbf{p}^2 - [\text{illegible}] - \mathbf{A}^2 \\
&-g_2^2(B_0^2-\mathbf{B}^2) \\
&+2g_1[A_0p_0+(\mathbf{A}.\mathbf{p})]-[\text{illegible}]\,\mathfrak{J}=0. \quad (94)
\end{aligned}$$

Si, en particulier, $A_0=B_0=\frac{\lambda}{r}$ potentiel coulombien, $\mathbf{A}=0$, $\mathbf{B}=0$, nous pouvons facilement obtenir les niveaux d'énergie W correspondant à la solution

$$\mathfrak{J}=[\text{illegible}] \quad (95)$$

L'équation (103) qui se réduit à

$$\begin{aligned}
&[\text{illegible}] - \mathbf{p}^2 - [\text{illegible}] \\
&[\text{illegible}] = 0.
\end{aligned}$$

nous donne, posant

$$[\text{illegible}]$$

l'équation radiale

$$[\text{illegible}] = 0. \quad (96)$$

à partir de laquelle nous obtenons facilement les niveaux

$$W = [\text{illegible}] \quad (97)$$

Nous allons maintenant examiner le cas où la seule interaction agissant sur le corpuscule est celle due au champ électromagnétique $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, le corpuscule étant caractérisé par un moment électromagnétique propre f_1.

Nous avons alors le système

$$\left.\begin{aligned}
&p_0\mathfrak{J}+m_0c\mathfrak{A}_0+if_1\left(\mathbf{E}.\vec{\mathfrak{A}}\right)=0, \\
&\mathbf{p}\mathfrak{J}-m_0c\vec{\mathfrak{A}}-if_1\mathbf{E}\mathfrak{A}_0-if_1\left(\mathbf{H}\wedge\vec{\mathfrak{A}}\right)=0, \\
&p_0\mathfrak{A}_0+\left(\mathbf{p}.\vec{\mathfrak{A}}\right)+m_0c\mathfrak{J}=0.
\end{aligned}\right\} \quad (98)$$

Considérons d'abord le cas d'un champ électrique seul :

Nous tirons des équations ci-dessus

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{m_0 c}(\mathbf{p}\mathcal{J} - if_1\mathbf{E}\mathcal{A}_0), \tag{99}$$

d'où les équations

$$\left.\begin{aligned} p_0\mathcal{A}_0 + \frac{1}{m_0 c}[\mathbf{p}^2\mathcal{J} + if_1(\mathbf{E}.\mathbf{p})\mathcal{A}_0 \\ + f_1\hbar\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}\mathcal{A}_0] + m_0 c\mathcal{J} = 0, \\ p_0\mathcal{J} + m_0 c\mathcal{A}_0 + \frac{if_1}{m_0 c}(\mathbf{E}.\mathbf{p})\mathcal{J} + \frac{f_1^2}{m_0 c}\mathbf{E}^2\mathcal{A}_0 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

ce qui s'écrit encore avec les fonctions d'ondes définies par (91).

$$\begin{aligned} \Big[p_0\rho_3 + m_0 c + \frac{1}{2m_0 c}\mathbf{p}^2(1+\rho_1) \\ + \frac{f_1}{m_0 c}(\mathbf{E}.\mathbf{p})\rho_2 \\ + \frac{f_1\hbar}{2m_0 c}\mathrm{div}\,\mathbf{E}(\rho_2-\rho_1) + \frac{f_1^2}{2m_0 c}\mathbf{E}^2(1-\rho_1)\Big]\psi = 0. \end{aligned} \tag{101}$$

Si le champ est électromagnétique, $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0$, cette équation se simplifie.

Remarquons que, bien que ce système soit relativement simple, l'élimination complète de $\mathcal{A}_0$ pour obtenir une équation en $\mathcal{J}$ donne des termes beaucoup plus compliqués.

Dans le cas où le champ est uniquement magnétique

$$\mathbf{E} = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0:$$

l'élimination de $\mathcal{A}$ à partir de l'équation

$$m_0 c\mathcal{A} + if_1\left[\mathbf{H}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right] = \mathbf{p}\mathcal{J}$$

nous donne immédiatement

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{m_0 c}\left[\frac{\{m_0^2c^2\mathbf{p}\mathcal{J} - if_1 m_0 c(\mathbf{H}\wedge\mathbf{p}\mathcal{J}) - f_1^2\mathbf{H}(\mathbf{H}.\mathbf{p}\mathcal{J})\}}{m_0^2c^2 - f_1^2\mathbf{H}^2}\right], \\ (\mathbf{p}.\vec{\mathcal{A}}) &= \frac{1}{m_0 c} \times \Big\{\frac{m_0^2c^2\mathbf{p}^2\mathcal{J} - f_1^2(\mathbf{H}.\mathbf{p})^2\mathcal{J}}{m_0^2c^2 - f_1^2\mathbf{H}^2} \\ &\quad - \frac{i\hbar f_1^2}{(m_0^2c^2 - f_1^2\mathbf{H}^2)^2}[\mathrm{grad}\,\mathbf{H}^2 \cdot (m_0^2c^2\mathbf{p}\mathcal{J} \\ &\quad - if_1 m_0 c(\mathbf{H}\wedge\mathbf{p}\mathcal{J}) \\ &\quad - f_1^2\mathbf{H}(\mathbf{H}.\mathbf{p}\mathcal{J}))]\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

Cette expression rapportée dans

$$p_0\mathcal{A}_0 + \left(\mathbf{p}.\vec{\mathcal{A}}\right) + m_0 c\mathcal{J} = 0 \tag{103}$$

nous donnera avec

$$p_0\mathcal{J} + m_0 c\mathcal{A}_0 = 0$$

un système en ψ qui, en général, ne sera pas hermitien.

Dans le cas particulier où le champ magnétique est constant, l'expression ci-dessus de $\left(\mathbf{p}.\vec{\mathcal{A}}\right)$ se simplifie et nous écrivons l'équation du second ordre sous la forme remarquable

$$\left\{-p_0^2 + \left[\mathbf{p} + \frac{f_1(\mathbf{H}\wedge\mathbf{p})}{\sqrt{m_0^2c^2 - f_1^2\mathbf{H}^2}}\right]^2 + m_0^2c^2\right\}\mathcal{J} = 0. \tag{104}$$

Dans le cas général, posant

$$\Delta = m_0^2c^2 - f_1^2\mathbf{H}^2,$$

nous obtenons la forme plus complexe

$$\begin{aligned} \Big\{-p_0^2 + \Delta^2\left(\frac{\mathbf{p}}{\Delta}\right)^2 + \Delta\left[\frac{f_1}{\Delta}(\mathbf{H}\wedge\mathbf{p})\right]^2 \\ + \hbar f_1\left[\frac{\mathrm{grad}\,\Delta}{\Delta^2}(\mathbf{H}\wedge\mathbf{p})\right] + m_0^2c^2\Big\}\mathcal{J} = 0. \end{aligned} \tag{105}$$

6. Nous allons maintenant revenir sur l'introduction du second potentiel vecteur dans le cas général et examiner dans ce cas l'élimination des composantes non évolutives.

L'équation (1) complétée par un terme d'interaction en g_2 traduisant l'action du second potentiel vecteur B_0, B s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} \Big(p_0\frac{1}{2}(\alpha_0^{(1)}\alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_0^{(2)}) \\ + \left[\mathbf{p}\frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}^{(1)}\alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)}\vec{\alpha}^{(2)}\right)\right] \\ + g_2\Big\{B_0\frac{1}{2}(\sigma_0^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_5^{(1)}\sigma_0^{(2)}) \\ - \left[\mathbf{B}\frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_5^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}\right)\right]\Big\} \\ + m_0 c\,\alpha_4^{(1)}\alpha_4^{(2)}\Big)\Phi = 0 \end{aligned} \tag{106}$$

avec

$$\alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \rho_2; \qquad \sigma_0 = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \rho_1; \qquad \vec{\sigma} = \frac{i}{2}\left(\vec{\alpha}\wedge\vec{\alpha}\right).$$

Par la même méthode que précédemment nous décomposons ce système en quatre équations en φ_{11}, φ_{12}, φ_{21}, φ_{22} et l'élimination de φ_{12}, φ_{21} nous donne le système

$$\begin{aligned} &(p_0 + m_0 c)\varphi_{11} + ig_2B_0\varphi_{22} \\ &\quad + \frac{1}{2m_0 c}\Big[\mathbf{p}^2 + g_2^2\mathbf{B}^2 - g_2\hbar\sum_{i,j}(\partial_i B_j)S^{i,j}\Big]\varphi_{11} \\ &\quad - \frac{1}{2m_0 c}\Big\{\sum_{i,j}(p_ip_j + g_2^2B_iB_j)S^{i,j} \\ &\qquad - \hbar g_2\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} \\ &\qquad - 2g_2[(\mathbf{B}\wedge\mathbf{p})S] + ig_2\hbar(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}.\mathbf{S})\Big\}\varphi_{22} = 0, \\ &(p_0 - m_0 c)\varphi_{22} + ig_2B_0\varphi_{11} \\ &\quad - \frac{1}{2m_0 c}\Big[\mathbf{p}^2 + g_2^2\mathbf{B}^2 - g_2\hbar\sum_{i,j}(\partial_i B_j)S^{i,j}\Big]\varphi_{22} \\ &\quad + \frac{1}{2m_0 c}\Big\{\sum_{i,j}(p_ip_j + g_2^2B_iB_j)S^{i,j} \\ &\qquad - \hbar g_2\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} \\ &\qquad - 2g_2[(\mathbf{B}\wedge\mathbf{p})\mathbf{S}] - ig_2\hbar(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}.\mathbf{S})\Big\}\varphi_{11} = 0. \end{aligned}$$

Introduisant les fonctions $\psi_{m_1, m_2; k}$ telles que

$$\psi_{m_1, m_2; 1} = \varphi_{11}, \qquad \psi_{m_1, m_2; 2} = \varphi_{22},$$

ce système s'écrit

$$\Big(p_0 \rho_3 + m_0 c + g_2 B_0 \rho_2 + \frac{1}{2 m_0 c} \Big[\mathbf{p}^2 + g_2^2 \mathbf{B}^2 - g_2 \hbar \sum_{i,j} (\partial_i B_j) S^{i,j} \Big] - \frac{\rho_1}{2 m_0 c} \Big\{ \sum_{i,j} (p_i p_j + g_2^2 B_i B_j) S^{i,j} - g_2 \hbar \operatorname{div} \mathbf{B} - 2 g_2 [(\mathbf{B} \wedge \mathbf{p}) \mathbf{S}] + i g_2 \hbar (\operatorname{rot} \mathbf{B} . \mathbf{S}) \Big\} \Big) \psi = 0 \quad (107)$$

et généralise au cas du potentiel extérieur B_0, $\mathbf{B}$ l'équation (15).

Pour simplifier cette expression, nous introduirons l'impulsion généralisée

$$\vec{\Pi} = \mathbf{p} \rho_3 - g_2 \mathbf{B} \rho_2. \quad (108)$$

L'équation (107) s'écrira alors

$$\Big(p_0 \rho_3 + g_2 B_0 \rho_2 + \frac{1}{2 m_0 c} \vec{\Pi}^2 (1 + \rho_1) - \frac{\rho_1}{m_0 c} (\vec{\Pi} . \mathbf{S})^2 - \frac{g_2 (1 - \rho_1)}{2 m_0 c} \Big\{ [2 (\mathbf{B} \wedge \mathbf{p}) - i \hbar \operatorname{rot} \mathbf{B}] \mathbf{S} \Big\} \Big) \psi = 0. \quad (109)$$

On voit apparaître sur cette équation analogue à (16) une action directe sur le spin du champ magnétique $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$.

Dans le cas particulier de la représentation de spin zéro cette équation nous redonne l'expression (92) au signe arbitraire près de g_2.

Le choix ci-dessus de l'opérateur $\vec{\Pi}$ peut être justifié par les considérations suivantes :

Dans le cas de l'équation (1), à l'opérateur $\mathbf{p}$ correspond la densité

$$\Phi^* \mathbf{p} \frac{1}{2} (\alpha_0^{(1)} \alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)} \alpha_0^{(2)}) \Phi = \varphi_{11}^* \mathbf{p} \varphi_{11} - \varphi_{22}^* \mathbf{p} \varphi_{22} = \psi^* \rho_3 \mathbf{p} \psi.$$

Lorsqu'un champ $\mathbf{B}$ agit sur la particule, nous pouvons écrire

$$\mathbf{p} \frac{1}{2} \big(\vec{\alpha}^{(1)} \alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)} \vec{\alpha}^{(2)} \big) - g_2 \mathbf{B} \frac{1}{2} \big(\vec{\sigma}^{(1)} \alpha_5^{(2)} + \alpha_5^{(1)} \vec{\sigma}^{(2)} \big) = (\mathbf{p} + i g_2 \mathbf{B} \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)}) \Big[\frac{1}{2} \big(\vec{\alpha}^{(1)} \alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)} \vec{\alpha}^{(2)} \big) \Big],$$

de sorte qu'à l'opérateur

$$\mathbf{p} \Big[\frac{1}{2} (\alpha_0^{(1)} \alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)} \alpha_0^{(2)}) \Big]$$

correspond maintenant l'opérateur

$$(\mathbf{p} + i g_2 \mathbf{B} \sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)}) \Big[\frac{1}{2} (\alpha_0^{(1)} \alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)} \alpha_0^{(2)}) \Big] = \mathbf{p} \Big[\frac{1}{2} (\alpha_0^{(1)} \alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)} \alpha_0^{(2)}) \Big] - g_2 \mathbf{B} \Big[\frac{1}{2} (\sigma_0^{(1)} \alpha_5^{(2)} + \alpha_5^{(1)} \sigma_0^{(2)}) \Big]$$

qui nous donne immédiatement la densité

$$\psi^* (\mathbf{p} \rho_3 - g_2 \mathbf{B} \rho_2) \psi = \psi^* \vec{\Pi} \psi.$$

Les problèmes que nous venons d'examiner nous montrent la complexité des équations des mésons dès que l'on veut tenir compte de l'action de champs extérieurs. Le formalisme développé ici bien que plus simple que les descriptions usuelles ne fait, sur bien des points, que mieux apparaître les nombreuses difficultés que rencontre l'étude théorique de ces corpuscules.

Je remercie M. le Professeur Louis de Broglie pour la bienveillante attention qu'il a accordée à ce travail.

Manuscrit reçu le 17 avril 1950.

TRANSMUTATION DES PARTICULES FONDAMENTALES. CHANGEMENT DE SPIN

Par A. PROCA.
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — L'auteur propose de tenir compte systématiquement dans la théorie, des possibilités de transformation d'une particule fondamentale en une autre. Les diverses particules sont considérées comme des états distincts d'un seul corpuscule, caractérisés par les valeurs des masses au repos et du spin total; seul le spin est considéré dans le présent article.

On écrit l'équation fondamentale en l'absence de champ, en introduisant des variables de spin à spectre continu. La seule condition d'existence d'un spin ne suffit pas pour fixer complètement le forme de cette équaion. Cependant, certaines propriétés qualitatives, qu'on énumère, en sont indépendantes. L'arbitraire dans le choix de la loi de mouvement fondamentale est examiné ensuite, en adoptant des hypothèses simplificatrices qui se présentent naturellement. Deux types essentiels d'équations apparaissent : pour l'un, qui est un cas singulier, la masse est indépendante du spin, pour l'autre elle peut en dépendre d'une manière qui n'est pas nécessairement celle qu'on considère d'habitude. Dans tous ces cas, lorsque le corpuscule se trouve dans un état de spin unique n, il obéit strictement aux équations classiques de la Mécanique ondulatoire; mais il peut aussi se trouver, naturellement « réparti sur plusieurs états de spin ». Enfin, l'Appendice indique comment on peut traiter le cas des spins demi-entiers suivant le même procédé utilisé pour les spins entiers et obtenir ainsi une équation de mouvement valable dans tous les cas.

La transformation d'une particule fondamentale en une autre de caractère différent a été mise en évidence expérimentalement, mais il ne semble pas que l'on se soit préoccupé des lois générales qui gouvernent ces transformations.

Une idée simple pour le traitement de ce problème consiste à considérer les particules fondamentales, ou au moins un certain nombre d'entre elles, comme autant d'états distincts d'un seul et même corpuscule et de regarder les transmutations entre particules comme des transitions entre états.

Les diverses particules fondamentales connues diffèrent entre elles par leur masse et par leur spin; de plus, elles peuvent être chargées ou neutres. Il semble que la manière la plus logique d'attaquer le problème consiste à considérer d'abord le spin, dont on connaît les valeurs propres alors qu'il n'en est pas de même pour la masse; il n'est d'ailleurs pas impossible que les deux questions soient liées, comme certains travaux ont essayé de le prouver.

Or, en analysant le problème sous l'angle considéré ici, une certaine ambiguïté apparaît dont il convient d'examiner le sens profond. Nous sommes ainsi forcés de reprendre à la base le problème des équations fondamentales sous son aspect le plus élémentaire. Nous essayerons donc d'établir les équations fondamentales qui après seconde quantification sont susceptibles de représenter des particules pouvant prendre à volonté une valeur quelconque du spin. Il nous semble d'ailleurs que l'intérêt d'une telle étude dépasse le cadre du problème particulier qui l'a suscité et qu'elle permet de découvrir certaines perspectives qui pourraient se révéler intéressantes.

1. Choix des variables; hypothèses de départ. — Soient x_k les coordonnées (commutables) attachées à la particule et $\dot{x}_k = \frac{1}{\hbar}[H, x_k]$, la « vitesse » qui correspond à la vitesse classique $\frac{dx}{dt}$. Nous admettons que le mouvement en l'absence de champ a lieu à moment constant $p_k = \text{const.}$, et nous définirons le spin comme la quantité σ_{ik} qu'il faut ajouter au moment orbital $m_{ik} = x_i p_k - x_k p_i$ pour obtenir une constante.

Pour achever cette définition, il nous faut introduire de nouvelles variables, les variables de spin. Or, remarquons qu'affirmer qu'une particule possède un spin revient à dire que *sa quantité de mouvement n'est plus proportionnelle à sa vitesse* $p_k \neq m\dot{x}_k$. Si une telle proportionnalité existait on en déduirait que $\dot{m}_{ik} = 0$, le moment orbital serait lui-même constant et le spin nul : c'est le cas du point matériel de la théorie classique. Cette absence de proportionnalité apparaît en fait pour toutes les particules connues, électron de Dirac, méson, etc. *L'existence du spin se manifeste donc par un écart « angulaire »*

entre sa vitesse et son moment; il est naturel de prendre les composantes de cet écart comme nouvelles variables décrivant le spin.

Pour établir l'équation générale, il est préférable d'introduire dès à présent la relativité (restreinte) et revenir ensuite, si besoin est à l'approximation newtonnienne. Soient donc v_k les opérateurs correspondant à la vitesse d'univers et p_k ceux du moment ($k = 1, 2, 3, 4; x_4 = ict$). Les nouvelles variables de spin u_k seront les composantes de la différence, qui mesure l'écart de proportionnalité :

$$u_k = \mu v_k - p_k, \tag{1}$$

μ étant une constante.

2. **Lagrangien et équation d'ondes.** — Pour obtenir le lagrangien, nous utilisons le processus habituel de passage par correspondance, avec toutefois une différence essentielle entre les points de départ. En Mécanique quantique ordinaire on part de l'expression classique

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2$$

et l'on considère les p_k comme des opérateurs $p_k \to \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x^k}$. Nous ne pouvons utiliser l'expression ci-dessus dans notre cas parce qu'en théorie classique elle n'est valable précisément que si la quantité de mouvement est proportionnelle à la vitesse, $p_x = m_0 v_x, \ldots$, c'est-à-dire si le spin est nul. La relation fondamentale fournie par la relativité est en réalité :

$$c^2 \mathrm{d}\tau^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \sum_1^3 (\mathrm{d}x^k)^2 \quad \text{ou} \quad \sum_1^4 (v^k)^2 + c^2 = 0.$$

En y portant $\mu v_k = p_k + u_k$, nous aurons la relation fondamentale entre opérateurs

$$\sum_1^4 (p_k + u_k)^2 + \mu^2 c^2 = 0 \tag{2}$$

et l'équation d'ondes

$$\left[\sum_1^4 (p_k + u_k)^2 + \mu^2 c^2\right] \psi(x_k, \xi_k) = 0. \tag{2 bis}$$

3. **Remarques sur les $\mathbf{u}_k$.** — La question du choix des u_k sera examinée plus loin. Remarquons cependant dès à présent que l'essentiel des considérations du paragraphe 2 est basé sur l'absence de proportionnalité entre la vitesse et la quantité de mouvement, condition projective et non métrique. En prenant comme variables la différence vectorielle u_k, sans aucune restriction, nous aurons en général surabondance de variables. En effet, la condition de l'existence d'un écart entre les deux vecteurs v_k et u_k peut être satisfaite même si, par exemple, les deux extrémités de ces vecteurs coïncident. Nous pouvons satisfaire à la condition de l'existence d'un spin, tout en ayant par exemple

$$\sum u_k^2 = 0 \quad \text{ou plus généralement} \quad \sum u_k^2 = d^2, \tag{3}$$

si naturellement une autre condition physique n'intervient pas pour la remplacer.

4. **Espace des spins.** — Considérons l'espace des variables de spin dans lequel sont définis les nouveaux opérateurs u_k. A l'encontre des théories déjà connues dans lesquelles l'« espace des spins » est discontinu, notre hypothèse fondamentale consistera à admettere que cet espace est *continu* et qu'il possède les mêmes propriétés que l'espace-temps ordinaire, dont il reste naturellement distinct.

Nous définirons l'espace des spins au moyen de quatre variables continues ξ^k, pareilles aux x^k et possédant les mêmes caractères de réalité. Nous admettrons en outre que toute transformation de Lorentz des x^k induit une même transformation des ξ^k. L'espace des spins sera ainsi identique à l'espace-temps; pour des raisons de commodité, nous pouvons les supposer juxtaposés et formuler l'hypothèse fondamentale en disant que l'espace-temps est en fait double, pareil en quelque sorte à *une variété de Riemann à deux feuillets*. En chacun de ses points aboutissent à la fois un vecteur x^k et un vecteur ξ^k et la fonction d'onde dépend aussi bien des x^k que des ξ^k. Les deux feuillets étant distincts et indépendants, les opérateurs définis dans l'un d'eux seront commutables avec ceux définis dans l'autre.

Dans l'espace des spins, définissons les opérateurs ξ_l et $\eta_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi^k}$, ainsi que $\omega_{ik} = (\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)$. Les lois de commutation avec ω_{ik}, de tout opérateur fonction des ξ_l et η_k seuls dépendent de sa variance relativiste. Ainsi, ω_{ik} commute avec tout invariant; pour un vecteur u_k, on aura

$$[\omega_{ik}, u_r] = \frac{1}{i}(u_i \delta_{kr} - u_k \delta_{ir}), \quad \ldots, \tag{4}$$

5. **Spin.** — A l'approximation newtonienne ($c \to \infty$, t = paramètre), l'hamiltonien déduit de (2) s'écrit

$$H = \text{const.} + \frac{1}{2\mu} \sum_1^3 (p_k + u_k)^2. \tag{5}$$

On en déduit que

$$\dot{p}_k = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}_k = \frac{1}{\mu}(p_k + u_k)$$

qui expriment les hypothèses de départ.

Le moment orbital m_{ik} n'est pas constant, puisque

$$\dot{m}_{ik} = \dot{x}_i p_k - \dot{x}_k p_i = \frac{1}{\mu}(u_i p_k - u_k p_i).$$

Or, on vérifie par (4) qu'en posant $\sigma_{ik} = \hbar.\omega_{ik}$ on a

$$\dot{\sigma}_{ik} = -\frac{1}{\mu}(u_i p_k - u_k p_i).$$

Il existe donc une intégrale première $m_{ik} + \sigma_{ik} =$ const. et l'on peut affirmer que la particule possède un spin dont l'expression est $\hbar(\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)$. Les valeurs propres du spin total sont donc $\hbar.l(l+1)$ avec $l = 0, 1, 2, \ldots$ La particule répond donc bien aux conditions posées au début [1].

Notons que cette conclusion est valable *quel que soit l'opérateur* u_k, pourvu qu'il soit fonction seulement des ξ_k et η_k et en outre, qu'il soit hermitique et se transforme comme un vecteur ainsi que l'exige l'invariance de (2 *bis*) avec $\psi =$ invariant.

Contrairement à ce qui se passe dans la théorie ordinaire, la condition d'existence d'un spin ne suffit pas pour déterminer la forme de l'équation d'une particule, puisque cette forme dépend du choix des u_k. Un certain nombre de propriétés qualitatives de la particule sont indépendantes de ce choix, mais de nouvelles conditions sont nécessaires pour achever de la définir par son équation et le problème du choix des u_k reste essentiel.

6. **Propriétés générales du corpuscule fondamental.** — Le spin est déterminé par $\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$ mais l'élément fondamental de cette théorie n'est pas le spin mais plutôt u_k, sorte de « quantité de mouvement intrinsèque » [2]. Les propriétés découlant de l'existence de cette nouvelle caractéristique pourraient, semble-t-il, être mises en évidence par des expériences permettant de distinguer entre la « vitesse » et la quantité de mouvement.

a. On a $\mu v_k = p_k + u_k$. On peut imaginer (puisqu'aussi bien le choix des u_k n'est pas arrêté), que la particule se trouve dans un état tel que la valeur moyenne d'une ou de toutes les composantes de la vitesse soient nulles; pour cet état, s'il existe, donc au repos [3], on aura $(p_k)_0 = -u_k$.

La particule envisagée possède donc en général la propriété d'avoir non seulement une énergie, mais aussi *une quantité de mouvement au repos*. Expérimentalement, le choc de corpuscules incidents contre de telles particules au repos, peut présenter des anomalies si on le compare au choc contre des particules ordinaires (spin zéro).

b. Si la particule peut se trouver dans un état tel que son spinent soit nul, elle sera identique à une particule de Gordon-Schrödinger puisque $p_k = \mu v_k$, Mais, dans cette théorie, on peut imaginer une particule dont la quantité de mouvement serait nulle, $p_k = 0$, et qui pourrait quand même se mouvoir avec une vitesse non nulle, $v_k = \frac{u_k}{\mu}$. Dans un choc elle pourrait éventuellement échanger son spinent et peut-être son spin, mais sa quantité de mouvement pourrait rester invariable.

c. Si en un point d'une « trajectoire » observée, par exemple sur une plaque photographique, la particule change de spin, ou mieux si son spinent varie sans que sa quantité de mouvement soit altérée, la trajectoire présentera généralement un coude puisque sa vitesse moyenne aura varié. Les principes de conservation, dont il n'y a aucune raison de mettre en doute la validité, exigeraient dans ce cas le départ d'une particule sans moment mais douée de spin, du type de celles mentionnées en *b*.

d. La quantité de mouvement pourrait changer *sans que la vitesse varie* (*).

e. Enfin, l'existence de termes additifs dans l'équation, pouvant s'écrire dès le début λu_k, permet l'introduction d'une constante multiplicative λ, qui devrait être par essence une *constante caractéristique* du mouvement sinon une constante universelle.

7. **Choix des u_k.** — Les u_k sont des opérateurs hermitiques, fonctions des ξ_i et η_k se transformant comme les composantes d'un vecteur; en dehors de cela ils sont arbitraires et un nouveau principe est nécessaire pour en fixer la forme définitivement. Deux conditions semblent pouvoir guider notre choix, au moins au début :

1° u_k doit dépendre linéairement des $\eta_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi^k}$, ce qui est l'hypothèse la plus simple et la plus naturelle;

2° lorsque le corpuscule se trouve dans un état de spin bien déterminé, n, l'équation fondamentale (2 *bis*) doit se réduire aux équations ondulatoires bien connues en Mécanique pour des particules de ce type.

L'analyse qui suit montrera que, avec la restriction 1°, les u_k se réduisent à deux types essentiels et que, pour tout choix largement arbitraire d'ailleurs

(1) Pour simplifier l'exposé, nous n'avons considéré ici que les valeurs entières du spin. Pour la manière de traiter le cas des valeurs demi-entières voir l'Appendice.

(2) Qu'on pourrait appeler *spinent* par analogie avec le terme « moment » appliqué aux p_k.

(3) Ou plus exactement « au repos dans une direction donnée »; elle ne sera « au repos dans toutes les directions » que si les u_k sont commutables.

(*) *Note ajoutée sur épreuves.* — On peut se demander si la désintégration en vol des rayons β, dans laquelle la vitesse semble rester constante, n'est pas un phénomène de ce genre (*cf.* Charpak et Suzor, *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, p. 322).

des u_k, il existe un état de spin n pour lequel l'équation fondamentale est :

ou entièrement équivalente aux équations connues,

ou n'en diffère que par son terme de masse.

8. **Opérateurs linéaires en** η_i. — Un opérateur vectoriel, hermitique, dépendant linéairement des η_i s'écrira, en général

$$u_k = A_{ik}\eta_i + \eta_i A_{ik} \tag{6}$$

les A_{ik} ayant la forme

$$A_{ik} = a\,\delta_{ik} + b\,\xi_i\xi_k, \tag{7}$$

où a et b sont des invariants, fonctions données de $R = \sqrt{-\xi_s\xi^s}$.

Une transformation unitaire appliquée à l'équation fondamentale permettra de dégager la forme essentielle des u_k. Pratiquement, si S est l'opérateur « multiplication par la fonction $S(R)$ » :

$$S(R) = \text{const.}\,\sqrt{a - bR^2}\,e^{-\frac{3}{2}\int\frac{bR\,dR}{a-bR^2}}, \tag{8}$$

on aura

$$S u_k S^{-1} = 2 A_{ik}\eta_i.$$

Effectuons une transformation de variables définie par $\xi_i = T\chi_i$ où T est une fonction à déterminer [4] et appelons U la substitution $\xi_i \rightarrow \chi_i$. $\Phi(\xi)$ étant une fonction quelconque, on a

$$\eta_i\Phi = \frac{1}{i}\,\frac{\partial\chi_s}{\partial\xi_i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\chi_s},$$

ce qu'on peut écrire plus correctement $\frac{\partial\chi_s}{\partial\xi_i}$ étant supposé exprimé en fonction des ξ :

$$\eta_i\Phi = \frac{\partial\chi_s}{\partial\xi_i}\,U^{-1}\,\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial\chi_s}\,U\Phi.$$

On voit alors qu'en choisissant

$$T = \text{const.}\,e^{-\int\frac{bR\,dR}{a-bR^2}}, \tag{9}$$

on aura, à une constante multiplicative près :

$$S u_k S^{-1} = 2\,a\,T^{-1}U^{-1}\,\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k}\,U \tag{10}$$

ou encore

$$u_k = 2\,a\,T^{-1}S^{-1}U^{-1}\,\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k}\,US. \tag{11}$$

Deux cas peuvent se présenter suivant que aT^{-1} dépend ou non de R, c'est-à-dire suivant que

$$u_k = \text{const.}\,S^{-1}U^{-1}\,\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k}\,US$$

ou

$$u_k = \text{const.}\,N(R)\cdot S^{-1}U^{-1}\,\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k}\,US. \tag{12}$$

Pour analyser leur signification, il faut voir ce que devient l'équation fondamentale

$$[(p_k + u_k)^2 + \mu^2c^2]\psi = \sum[p_k^2 + 2p_ku_k + u_k^2 + \mu^2c^2]\psi = 0.$$

lorsque la particule se trouve dans l'état de spin total égal à n.

9. **Fonction** ψ **pour l'état de spin** n. — Un tel état est décrit par un ψ qui, par rapport aux variables ξ_k est une fonction propre de $M^2 = \frac{1}{2}\,\omega_{ik}\omega^{ik}$ c'est-à-dire une fonction pseudo-sphérique Y_n à quatre dimensions, multipliée par une fonction arbitraire $f(R)$ de la « distance » $R = \sqrt{-\xi_s\xi^s}$ [5].

Nous définirons une fonction pseudo-sphérique comme dans le cas de trois dimensions par $Y = \frac{H_n}{R^n}$ où H_n est un polynome harmonique, homogène et de degré n en ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, donc tel que

$$\eta_k^2 H_n = 0, \qquad \xi^k\eta_k H_n = \frac{n}{i}\,H_n. \tag{13}$$

Comme

$$M^2 = \frac{1}{2}\,\omega_{ik}\omega^{ik} = -R^2\eta_k^2 - \xi_k\eta_k\left(\xi_k\eta_k + \frac{2}{i}\right),$$

on aura

$$M^2 Y_n = n(n+2)Y_n. \tag{14}$$

Si l'on écrit

$$H_n = \varphi_{ijk\ldots n}\,\xi_i\xi_j\xi_k\ldots\xi_n, \tag{15}$$

les $\varphi_{ijk\ldots}$ étant symétriques, l'harmonicité se traduira par $\varphi_{iik\ldots} = 0$. La fonction d'onde s'écrira

$$\psi = f(R)\,\varphi_{ijk\ldots}\,\xi_i\xi_j\xi_k\ldots.$$

Les $\varphi_{ijk\ldots}$ ne dépendent que des x_1, x_2, x_3, x_4 et l'invariance de l'équation fondamentale exige que ψ = invariant donc que les $\varphi_{ijk\ldots}$ se transforme de façon contragrédiente aux produits $\xi_i\xi_j\xi_k\ldots$.

Une particule de spin total n sera donc décrite en fait par un certain nombre de fonctions des x_k, à savoir par les composantes $\varphi_{ijk\ldots}$ d'un tenseur symétrique de rang n, satisfaisant de plus à la condition $\varphi_{iik\ldots} = 0$. Par exemple, *un méson de spin* 1 sera décrit par

$$\psi = f(R)\,\varphi_i\xi_i,$$

donc essentiellement par quatre fonctions φ_i des x_k.

[4] T est un invariant exprimable soit en fonction de $R = \sqrt{-\xi_s\xi^s}$ soit en fonction de $\rho = \sqrt{-\chi_s\chi^s}$; ρ est lié à R par l'équation implicite $R = \rho T$.

[5] Récemment, ces fonctions ont été plus particulièrement étudiées par M. Born et ses collaborateurs à l'occasion des travaux sur le principe de réciprocité.

On voit apparaître ainsi les « composantes » de la fonction d'ondes, nécessaires dans la théorie classique pour la description des particules d'un spin déterminé.

10. **Réduction aux équations connues.** — *Premier cas.* — Avec les notations du paragraphe 8, supposons que l'opérateur u_k soit tel que $aT^{-1} = \text{const.}$; dans ce cas λ, étant une constante :

$$u_k = \lambda S^{-1} U^{-1} \frac{\partial}{i\,\partial\chi_k} US \tag{16}$$

et l'équation fondamentale s'écrit

$$S^{-1}U^{-1}\left[\left(p_k + \frac{\lambda}{i}\frac{\partial}{\partial\chi_k}\right)^2 + \mu^2 c^2\right] US\psi = 0. \tag{17}$$

Considérons un état de spin n. (17) sera satisfaite par

$$US\psi = H_n = \varphi_{ijk\ldots}\chi_i\chi_j\chi_k\ldots$$

pourvu que les $\varphi_{ijk\ldots}$ fonctions des x^k, satisfassent à

$$\left.\begin{aligned} (p_k^2 + \mu^2 c^2)\,\varphi_{ijk\ldots} &= 0, \\ p_l\,\varphi_{ljk\ldots} &= 0 \\ \text{et} \qquad \varphi_{iik\ldots} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

En revenant aux ψ on peut dire qu'un état de spin n est décrit par la fonction d'onde

$$\psi = S^{-1}U^{-1}H_n(\chi) = f(R)H_n(\xi), \tag{19}$$

les « composantes » $\varphi_{ijk\ldots}$ satisfaisant à (18). Or, *ces dernières équations sont les équations ondulatoires classiques d'une particule de spin n, sous la forme de Fierz.*

Ainsi, dans le premier cas, il existe toujours un état de spin n pour lequel le mouvement de la particule obéit aux équations classiques, c'est-à-dire est exactement celui des particules connues de même spin. Par exemple, si l'on a choisi

$$u_k = \lambda(R\eta_k R + \xi_l\omega_{lk} + \omega_{lk}\xi_l), \tag{20}$$

l'état $\psi = R^{-6}\varphi_i\xi_i$ représentera un méson de spin unité, qui serait décrit en mécanique ondulatoire classique par les équations habituelles entre les quatre composantes φ_i.

La condition $aT^{-1} = \text{const.}$ limite le choix des u_k à celui d'une seule des deux fonctions arbitraires a et b, par exemple à $a(R)$ qui reste arbitraire, b étant donnée par

$$b = \frac{aa'}{R(a'R - a)}, \qquad a' = \frac{da}{dR};$$

S est complètement déterminée.

Parmi toutes les formes possibles, on peut prendre $a = \text{const.}$, $b = 0$, c'est-à-dire

$$u_k = \frac{\lambda}{i}\frac{\partial}{\partial\xi_k}.$$

Dans cette hypothèse, les composantes de la vitesse commutent entre elles, donc sont simultanément mesurables.

Mais le premier cas en l'absence de toute interaction est un cas singulier ([6]), en ce sens que l'équation fondamentale ne suffit pas pour déterminer sans ambiguïté l'état de la particule. En effet, cette équation contient les dérivées uniquement par la combinaison $\hbar\frac{\partial}{\partial\chi_k} + \lambda\frac{\partial}{\partial\xi_k}$; elle ne fixe donc que la manière dont ψ dépend d'une combinaison linéaire des variables x^k et ξ^k et la dépendance des x seuls reste largement arbitraire. Une seconde relation est nécessaire, qui se présente d'ailleurs d'elle-même si nous nous reportons aux observations du paragraphe 3, *in fine.* Nous y avons vu que l'existence d'un spin était compatible avec la condition

$$u_k u^k = 0 \qquad \text{ou} \qquad u_k u^k = d^2.$$

En l'absence de toute autre contrainte, l'équation fondamentale jointe à la condition $(u_k)^2\psi = 0$ achève de définir la particule dans le sens indiqué.

Deuxième cas. — Dans ce cas

$$u_k = \lambda N(R)\,S^{-1}U^{-1}\frac{\partial}{i\,\partial\chi_k}US,$$

a et b sont des fonctions arbitraires et en général les équations aux φ ne sont plus les équations classiques. Certains choix de la fonction $N(R)$ conduisent cependant à des particularités intéressantes.

En effet, l'élément déterminant u_k^2 s'écrit

$$u_k^2 = -\lambda^2 N S^{-1}U^{-1}\frac{\partial}{\partial\chi_k}UNU^{-1}\frac{\partial}{\partial\chi_k}US.$$

Remarquons qu'en appliquant à $\psi(\xi)$ cet opérateur, on peut écrire $UNU^{-1}\frac{\partial}{\partial\chi_k}US\psi$, d'après la signification même de U, comme un véritable produit de deux fonctions

$$(UN)\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}US\psi\right),$$

dont la dérivée sera

$$\frac{\partial}{\partial\chi_k}UNU^{-1}\frac{\partial}{\partial\chi_k}US\psi = \left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}UN\right)\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}US\psi\right) + (UN)\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi_k^2}US\psi\right).$$

On aura donc en définitive

$$u_k^2 = -\lambda^2 N S^{-1}U^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k}UN\right)\frac{\partial}{\partial\chi_k}US - \lambda^2 S^{-1}N^2\frac{\partial^2}{\partial\chi_k^2}US.$$

Considérons alors l'équation fondamentale

$$[p_k^2 + 2p_k u_k + u_k^2 + \mu^2 c^2]\psi = 0$$

([6]) Cette remarque est due à M. J. Horowitz.

et un état de spin n décrit par $\psi = S^{-1}U^{-1}H_n(\chi)$. On aura

$$u_l^2 \psi = -\lambda^2 NS^{-1}U^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \chi^l} UN\right)\frac{\partial H_n(\chi)}{\partial \chi^l}.$$

En effectuant la dérivation $\frac{\partial}{\partial \chi^k} UN$ un facteur χ_k apparaîtra. *Choisissons* u_k, donc N, *de façon que*

$$NS^{-1}U^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \chi_k} UN\right) = -\frac{k^2c^2}{\lambda^2}\chi_k \qquad \text{avec } k, c, \lambda = \text{const.}$$

On aura alors, en vertu de (13)

$$u_l^2 \psi = k^2 c^2 n H_n$$

et l'équation fondamentale sera satisfaite si

$$[p_k^2 + (\mu^2 + nk^2)c^2] H_n = 0,$$

$$p_k \frac{\partial H_n}{\partial \chi_k} = 0.$$

Or, ces équations sont équivalentes aux équations de Fierz, *mais avec un autre terme de masse.* Donc, avec le choix de u_k indiqué plus haut, l'état

$$\psi = S^{-1}U^{-1}H_n(\chi)$$

représente une particule de spin n :

1° du type classique, c'est-à-dire obéissant aux équations de Fierz;

2° ayant une masse au repos variable avec le spin n, de la forme $\mu^2 + nk^2$.

Exemple. — Si nous choisissons

$$u_k = \lambda R\left(\delta_{lk} + \frac{s}{s-1}\frac{\xi_l\xi_k}{R^2}\right)\eta_l + \text{adjoint}$$

$$= \lambda R^{\frac{1-3s}{2}}\left(\delta_{lk} + \frac{s}{s-1}\frac{\xi_l\xi_k}{R^2}\right)\eta_l R^{\frac{1+3s}{2}}.$$

où s est un nombre quelconque $-\frac{1}{3} < s < 1$, on peut dire que :

1° lorsque la particule se trouve dans l'état

$$\psi = \Phi(x) = \text{indép. des } \xi.$$

elle aura le spin 0 et son équation sera

$$[p_k^2 + \mu^2c^2]\Phi = 0;$$

2° dans l'état

$$\psi = R^{-\frac{3s+1}{2}} \varphi_r \xi_r$$

elle aura le spin total 1 et, puisque $u_k^2\psi = \lambda^2\psi$, elle satisfera à

$$[p_k^2 + (\mu^2c^2 + \lambda^2)]\varphi_r = 0, \qquad p_r\varphi_r = 0.$$

Tout se passera comme si elle avait une masse au repos différente de celle d'une particule de spin 0;

3° dans l'état

$$\psi = R^{-\frac{n(3s-2)}{2}} H_n(\xi).$$

elle aura le spin n et une masse au repos $\frac{n\lambda^2}{c^2} + \mu^2$.

De nombreuses suggestions ont été faites jusqu'à présent tendant à lier la valeur de la masse à celle du spin. On voit ici sur un exemple particulier de quelle façon on peut les lier systématiquement aux états propres de l'opérateur u_l^2 et en même temps on peut se rendre compte du véritable degré d'arbitraire de cette hypothèse.

11. Remarques. — Dans l'exemple choisi au paragraphe précédent, n ne peut dépasser une certaine valeur, le comportement de ψ à l'infini n'étant plus satisfaisant. Ce comportement aux limites dépend, lorsqu'on veut retomber sur les équations classiques, du choix de la fonction S, donc en définitive, du choix de u_k; on a ainsi un autre critère qui circonscrit ce choix.

Si ψ s'annule à l'infini, on peut toujours définir dans le premier cas un courant *conservatif dans l'espace ordinaire*; dans le second cas cette conservation n'est acquise que pour des fonctions N convenables.

On prendra pour valeurs moyennes d'un opérateur A dans l'espace ordinaire, la somme de leurs valeurs sur toutes les possibilités de spin

$$\bar{A} = \int \psi^* A\psi \, d(x)\, d(\xi),$$

comme on le fait d'habitude, avec cette différence qu'ici le domaine de sommation est continu.

Enfin, l'équation du mouvement du corpuscule dans un champ électromagnétique A_k sera

$$[(p_k + eA_k + u_k)^2 + \mu^2c^2]\psi = 0,$$

et son interaction avec d'autres champs s'établira à partir du lagrangien comme en théorie ondulatoire classique. Ce problème présente cependant un intérêt tout particulier et sera examiné ailleurs.

APPENDICE.

Cas des spins demi-entiers. — Pour la clarté de l'exposé, nous n'avons envisagé dans ce qui précède que le cas des spins entiers; cependant les mêmes formules et raisonnements restent valables si l'on donne aux symboles employés, la signification plus générale indiquée ci-dessous.

Dans notre théorie, le spin est donné en somme par le « moment orbital » dans l'espace des ξ. Considérons pour préciser, le cas habituel des trois dimensions que nous appellerons ici ξ, η et ζ et soient M_1, M_2, $M_3 = \frac{1}{2}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$, ... les composantes de ce

moment. Ces composantes satisfont aux conditions générales bien connues

$$M_1 M_2 - M_2 M_1 = i M_3, \quad \ldots, \tag{1}$$

mais n'admettent que des valeurs propres entières et l'on sait (7) qu'il n'est pas possible, en partant des fonctions sphériques, de trouver un système de fonctions propres convenables qui correspondent au cas des spins demi-entiers.

Cela est indiscutable tant que nous écrivons notre « moment orbital », c'est-à-dire notre spin en fonction des ξ_k, comme nous l'avons fait dans cet article, pour la commodité de l'exposition. Mais, pour nous, le problème est différent puisque *nous ne sommes tenus par aucune condition à employer les* ξ, η, ζ (ou les ξ_k) *comme variables indépendantes* pour exprimer le spin.

La solution, c'est-à-dire la transcription de la théorie précédente pour qu'elle puisse être applicable à tous les cas, s'obtient *en écrivant l'équation fondamentale* non pas dans l'espace vectoriel des ξ_k, qui a les propriétés de l'espace temps ordinaire, mais *dans l'espace spinoriel sous-jacent* (8) qui devrait être considéré comme l'espace fondamental. Voici quel est le sens de cette affirmation.

Revenons à ξ, η, ζ et aux moments (1).

L'espace spinoriel sous-jacent à ξ, η, ζ sera décrit par un spineur de composantes u_1, u_2 et ses complexes conjuguées $u_{\dot 1}$, $u_{\dot 2}$. Posons donc

$$\xi = \frac{1}{2}(u_{\dot 1} u_2 + u_{\dot 2} u_1), \qquad \eta = \frac{1}{2i}(u_{\dot 1} u_2 - u_{\dot 2} u_1), \qquad \zeta = \frac{1}{2}(u_{\dot 1} u_1 - u_{\dot 2} u_2), \tag{2}$$

et considérons une quatrième variable réelle T, indépendante des précédentes et dont l'expression en fonction des u, $T = f(u_1, u_2, u_{\dot 1}, u_{\dot 2})$ est arbitraire pour le moment. Le passage des quatre variables indépendantes u aux variables ξ, η, ζ, T est bien défini et nous pouvons aisément calculer les $\frac{\partial}{\partial \xi}$, ... en fonction des $\frac{\partial}{\partial u_1}$, ...

Pour simplifier les formules, choisissons

$$T = \frac{i}{2}(u_{\dot 1} u_{\dot 2} - u_1 u_2).$$

Dans ce cas l'on a pour la troisième composante

$$M_3 = \frac{1}{i}\left(\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{2}\left(-u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} - u_{\dot 2} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 2}}\right)$$

Tant que la fonction d'onde ψ ne dépendra *que* des variables ξ, η, ζ le passage aux variables u ne présentera aucun intérêt : par exemple $\psi = e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi}}$ est toujours une fonction propre de M_3, qu'elle soit exprimée au moyen des u ou non. Mais si la fonction d'ondes est *linéaire dans les* u, ou plus généralement de degré impair, elle pourra constituer une fonction propre uniforme de M_3, *correspondant à des valeurs propres demi-entières*. Par exemple, on a

$$\left.\begin{aligned} M_3 \varphi &= \frac{1}{2}\varphi \quad \text{pour} \quad \varphi = A u_2 + B u_{\dot 1}, \\ M_3 \Phi &= -\frac{1}{2}\Phi \quad \text{pour} \quad \Phi = A' u_1 + B' u_{\dot 2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Avec le choix de T ci-dessus, on a

$$\left.\begin{aligned} M_1 + i M_2 &= u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 2}} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{1}{2} \frac{u_{\dot 2}^2 + u_{\dot 1}^2}{u_{\dot 1} u_{\dot 2} - u_1 u_2} \\ &\quad \times \left(-u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} + u_{\dot 2} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 2}}\right), \\ M_1 - i M_2 &= u_{\dot 2} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{1}{2} \frac{u_{\dot 2}^2 + u_1}{u_{\dot 1} u_{\dot 2} + u_1 u_2} \\ &\quad \times \left(-u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} + u_{\dot 2} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 2}}\right), \\ M_3 &= \frac{1}{2}\left(-u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_{\dot 1} \frac{\partial}{\partial u_{\dot 1}} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

et (3) sont en même temps fonctions propres de M_3 et de $\mathbf{M}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$. Cela étant, pour englober tous les spins dans une théorie unique, il faudra *écrire l'équation fondamentale en fonction des* u et des $\frac{\partial}{\partial u}$, les dérivées $\frac{\partial}{\partial \xi}$ qui apparaissent étant remplacées par leurs expressions en fonction des u et $\frac{\partial}{\partial u}$. Lorsque la fonction d'onde ne comprendra que des combinaisons du type (2) elle sera fonction des ξ, η, ζ seulement; l'équation pourra s'écrire sous la forme vectorielle qui a déjà été donnée et la particule sera du type étudié au cours de l'article précédent. Mais si les u ne peuvent pas se grouper en des combinaisons du type (2), ψ représentera en général une superposition d'états dont au moins un correspondra à un spin demi-entier. Toutes les conclusions restent valables dans le cas général, pourvu que l'équation soit écrite sous cette nouvelle forme.

Pour présenter la théorie, on peut évidemment partir dès le début avec les variables u et constater par exemple que (4) fournissent les expressions d'opérateurs satisfaisant aux conditions

$$M_1 M_2 - M_2 M_1 = i M_3,$$

donc ayant des valeurs propres entières et demi-entières, *les fonctions propres de ces dernières étant uniformes ;* mais cela n'ajoute rien de nouveau et sacrifie la clarté à la généralité.

Remarquons enfin sous quel aspect apparaît, à la lumière de la théorie précédente, la conception

(7) *Cf.* par exemple W. Pauli, *Handbuch der Physik*, p. 126.
(8) Suivant une idée déjà publiée, cf. *Cambridge International Conference on Fundamental Particles*, 1946 et aussi *C. R. Acad. Sc.*, 1946, 233, p. 270.

suivant laquelle un méson peut être considéré comme formé par deux particules de spin $\frac{1}{2}$: une particule de spin 1 est représentée par un polynome homogène, du premier degré en ξ, mais du second en u; décomposé en facteurs du premier degré en u, ce polynome décrit par chacun de ces facteurs une particule de spin $\frac{1}{2}$.

D'une façon générale, la parité du degré du polynome qui représente une particule est liée au caractère entier ou demi-entier de son spin. Elle influera sur les propriétés de commutation des ψ et pourra ainsi servir pour établir un lien entre le spin et la statistique.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

BHABHA H. J. — *Proc. Indian Acad. Sc.*, 1945, A, **21**, 241, *Rev. Mod. Phys.* 1945, **17**, 200. Cambridge Conference on Fundamental Particles, 1947, p. 22.

BROGLIE L. DE. — Théorie générale des particules à spin, Gauthier-Villars, Paris, 1943.

DIRAC P. A. M. — *Proc. Roy. Soc.*, 1936, **155**, 447.

FIERZ M. — *Helv. Phys. Acta*, 1939, **12**, 3.

FIERZ M. et PAULI W. — *Proc. Roy. Soc.*, 1939, **173**, 211.

HARISH-CHANDRA. — Cambridge Conference on Fundamental Particles, 1947, p. 185; *Proc. Roy. Soc.*, A. **186**, 502; *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 793.

KRAMERS, BELINFANTE et LUBANSKI. — *Physica*, 1941, **8**, 597.

KWAL B. — *Thèse*, Paris, 1946; *J. Phys. Rad.*, 1949, **10**, 189.

LE COUTEUR J. K. — *Proc. Roy. Soc.*, 1949, **196**, 251; 1950 **202**, 285 et 395.

PAULI W. — *Phys. Rev.*, 1940, **58**, 716. *Rev. Mod. Phys.*, 1943, **15**, 175.

PETIAU G. — *J. Phys. Rad.*, 1946, **7**, 124 et 181.

POTIER R. — *C. R. Ac. Sc.*, Paris, 1946, **222**, 1076; 1947, **224**, 1332; 1948, **226**, 1146; 1949, **228**, 656.

SUR LA SECONDE QUANTIFICATION

Par JEAN G. VALATIN.
Institut Henri Poincaré, Paris (1).

Sommaire. — La seconde quantification est exposée pour un système de particules obéissant au principe d'exclusion, en caractérisant les tenseurs antisymétriques représentant l'état du système à l'aide des quantités de l'algèbre extérieure de Grassmann. Cette représentation des états conduit à l'introduction naturelle des opérateurs de création et d'annihilation de la seconde quantification, et fournit une méthode facilitant les calculs portant sur les états du système. L'équivalence des opérateurs correspondants de la méthode de l'espace de configuration et de la seconde quantification se présente d'une façon simple en comparant les expressions (7), (8), (35), (38 *b*) et (40). On peut ainsi éviter l'examen laborieux des changements de signe. Les équations vectorielles correspondantes explicitent cette équivalence et illustrent les règles de calcul des opérateurs et des états.

Introduction. — L'état d'un système de particules peut être décrit dans le formalisme de la Mécanique ondulatoire par deux méthodes distinctes : celle de l'espace de configuration et celle de la seconde quantification. Dans le cas de particules obéissant au principe d'exclusion, la méthode de l'espace de configuration caractérise l'état du système par une fonction d'onde antisymétrique des variables des particules. Dans la seconde quantification le rôle principal est joué au lieu des variables des particules individuelles, par les états possibles d'une seule particule et l'état du système est caractérisé par les coefficients d'un tenseur antisymétrique de l'espace des états d'une seule particule.

En introduisant pour les tenseurs antisymétriques de cet espace la représentation de l'algèbre extérieure de Grassmann [1, 2] les opérateurs de création et d'annihilation de la seconde quantification apparaissent d'une façon naturelle et l'on obtient une méthode de calcul des états du système. L'équivalence mathématique des deux méthodes de description et des opérateurs correspondants se présente également sous une forme particulièrement simple. C'est l'algèbre extérieure qui est à la base de la méthode de la seconde quantification dans le cas du principe d'exclusion, bien que cette méthode [3, 4] ait été inventée indépendamment. L'introduction des notions de l'algèbre extérieure apporte des simplifications et l'on n'a plus besoin de prouver d'une façon indirecte l'existence des opérateurs anticommutants qui correspondent aux opérations les plus élémentaires du calcul.

Nous voulons exposer brièvement sous cette forme la méthode de la seconde quantification et sa relation à la méthode de l'espace de configuration. Nous nous bornons à une théorie dans laquelle l'opérateur d'énergie d'une particule libre est de spectre positif et considérerons seulement dans une seconde Partie les modifications de la théorie dues aux états d'énergie négative de l'électron de Dirac.

Méthode de l'espace de configuration. Les espaces R et R^f. — Soit l'équation d'onde d'une seule particule

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x; t) = W(x) \psi(x; t), \tag{1}$$

x désigne toutes les variables de la particule, $W(x)$ est l'hamiltonien, le temps t figure comme paramètre dans l'équation. Les fonctions d'onde $\psi(x; t)$ peuvent être développées selon un système orthonormal complet de fonctions $\psi_r(x)$, sous la forme

$$\psi(x, t) = \sum_r c^r(t) \psi_r(x). \tag{1 a}$$

Les fonctions $\psi_r(x)$ sont les éléments de base d'un espace fonctionnel. Toute fonction normée de l'espace est caractérisée selon (1 *a*) par une suite de nombres c^r avec $\sum_r |c^r|^2 = 1$. Nous appellerons R l'espace de Hilbert des vecteurs c^r, espace des états d'une seule particule.

L'état d'un système de f particules peut être caractérisé par une fonction d'onde

$$\Phi = \Phi(x^1, x^2, \ldots, x^f; t)$$

dépendant des variables x^k des f particules et obéissant à l'équation d'onde

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x^1, x^2, \ldots, x^f; t) = \mathcal{H} \Phi(x^1, x^2, \ldots, x^f; t). \tag{2}$$

Les produits $\psi_{r_1}(x^1) \psi_{r_2}(x^2) \ldots \psi_{r_f}(x^f)$ de f fonctions $\psi_{r_k}(x^k)$ constituent une base pour

(1) Actuellement Universitetets Institut for Teoretisk Fysik, Copenhague.

l'espace fonctionnel des fonctions $\Phi(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(f)}, t)$ et celles-ci peuvent être développées sous la forme

$$\Phi = \Phi(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(f)}; t) = \sum_{r_1 r_2 \ldots r_f} c^{r_1 r_2 \ldots r_f}(t)\, \psi_{r_1}(x^{(1)})\, \psi_{r_2}(x^{(2)}) \ldots \psi_{r_f}(x^{(f)}). \quad (2\,a)$$

L'espace hilbertien des éléments ayant pour coordonnées $c^{r_1 r_2 \ldots r_f}$ est l'espace R^f des tenseurs de degré f de l'espace R. Comme jusqu'ici nous n'avons introduit aucune restriction de symétrie concernant les fonctions Φ, l'indice r_k du coefficient $c^{r_1 r_2 \ldots r_k \ldots r_f}$ dans (2 *a*) correspond à l'état $\psi_{r_k}(x^{(k)})$ du $k^{\text{ième}}$ électron.

L'hamiltonien $\mathcal{H}$ de l'équation d'onde (2) doit être symétrique par rapport aux variables des f particules, dans le cas où ces particules sont toutes identiques. On peut supposer qu'il a la forme

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{W} + \mathcal{V}, \\ \mathcal{W} &= \sum_{k=1}^{f} W_k = \sum_{k=1}^{f} W(x^{(k)}); \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{V} &= \sum_{i>k=1}^{f} V_{ik} = \sum_{i>k=1}^{f} V(x^{(i)}, x^{(k)}), \\ V(x^{(i)}, x^{(k)}) &= V(x^{(k)}, x^{(i)}); \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$W(x^{(k)})$ est l'opérateur d'énergie de la $k^{\text{ième}}$ particule, éventuellement dans un champ extérieur, $V(x^{(i)}, x^{(k)})$ l'opérateur de l'énergie d'interaction entre les particules i et k. Les opérateurs de la forme (3) et (4) représentent deux types importants d'opérateurs de la théorie d'un système de particules. Dans ce qui suit, quand nous considérons ces opérateurs et leur relation avec les opérateurs de la seconde quantification, nous ne nous bornons naturellement pas au cas spécial des opérateurs d'énergie.

Avec la base $\psi_r(x)$, les éléments de matrice de l'opérateur $W(x)$ sont dans l'espace R,

$$(r \mid W \mid s) = \int \psi_r^*(x)\, W(x)\, \psi_s(x)\, \mathrm{d}x. \quad (3\,a)$$

Les éléments de matrice de $V(x, x')$ sont dans l'espace R^2,

$$(r\bar{r} \mid V \mid s\bar{s}) = \iint \psi_r^*(x)\, \psi_{\bar{r}}^*(x')\, V(x, x')\, \psi_s(x)\, \psi_{\bar{s}}(x')\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x'. \quad (4\,a)$$

Fonctions d'onde antisymétriques. L'espace $\overset{f}{\wedge} R$. — La fonction d'onde d'un système de f particules obéissant au principe d'exclusion est antisymétrique par rapport aux variables $x^{(k)}$ des f particules. En introduisant un ordre lexicographique

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_f \quad (5\,a)$$

des indices, les éléments de base de l'espace de ces fonctions d'onde antisymétriques peuvent être représentés par les déterminants de Slater

$$\Phi_{[r_1 \ldots r_f]}(x^{(1)}, \ldots, x^{(f)}) = \frac{1}{\sqrt{f\,!}} \begin{vmatrix} \psi_{r_1}(x^{(1)}) & \ldots & \psi_{r_f}(x^{(1)}) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \psi_{r_1}(x^{(f)}) & \ldots & \psi_{r_f}(x^{(f)}) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Le facteur de normalisation $\frac{1}{\sqrt{f!}}$ correspond aux $f!$ membres du déterminant. La fonction d'onde du système peut être développée selon ces déterminants de Slater sous la forme

$$\Phi(x^{(1)}, \ldots, x^{(f)}; t) = \sum_{r_1 < \ldots < r_f} c^{[r_1 \ldots r_f]}(t)\, \Phi_{[r_1 \ldots r_f]}(x^{(1)}, \ldots, x^{(f)}). \quad (6)$$

Les indices r_k ne correspondent plus à un électron déterminé, mais à l'ordre lexicographique (5 *a*). Si la fonction d'onde antisymétrique (6) est donnée dans le développemet (2 *a*) des fonctions des variables de f particules, on a

$$c^{[r_1 \ldots r_f]} = \varepsilon_P \sqrt{f\,!}\, c^{P(r_1 \ldots r_f)}, \quad (6\,a)$$

où $P(r_1 \ldots r_f)$ désigne une permutation quelconque des indices $r_1 \ldots r_f$ et $\varepsilon_P = \pm 1$ suivant que la permutation est paire ou impaire.

L'espace hilbertien des coefficients $c^{[r_1 \ldots r_f]}$ est l'espace $\overset{f}{\wedge} R$ des tenseurs antisymétriques de degré f de R. Pour un élément normé de cet espace on a

$$\sum_{r_1 < \ldots < r_f} \left| c^{[r_1 \ldots r_f]} \right|^2 = 1. \quad (6\,b)$$

On peut définir des déterminants de Slater (5) également avec un ordre des indices qui diffère de l'ordre (5 *a*). Ces déterminants ne diffèrent des éléments de base (5), (5 *a*) de l'espace des fonctions d'onde antisymétriques que par un facteur ± 1. En désignant par $\Phi_{[r_1 \ldots r_{k-1} r r_{k+1} \ldots r_f]}$ le déterminant de Slater qu'on obtient de $\Phi_{[r_1 \ldots r_{k-1} r_k r_{k+1} \ldots r_f]}$ en remplaçant l'indice r_k par r, on a pour l'opérateur $\mathcal{W}$ de (3), compte tenu de (3 *a*) :

$$\begin{aligned} &(\Phi_{[r_1 \ldots r_{k-1} r r_{k+1} \ldots r_f]} \mid \mathcal{W}\, \Phi_{[r_1 \ldots r_{k-1} r_k r_{k+1} \ldots r_f]}) \\ &\quad = \int \ldots \int \Phi^*_{[r_1 \ldots r_{k-1} r r_{k+1} \ldots r_f]}\, \mathcal{W}\, \Phi_{[r_1 \ldots r_{k-1} r_k r_{k+1} \ldots r_f]}\, \mathrm{d}x^{(1)} \ldots \mathrm{d}x^{(f)} = (r \mid W \mid r_k), \end{aligned} \quad (7)$$

résultant des $f!$ termes non nuls qu'on obtient en substituant les expressions (5) en (7). (7) donne à un facteur ± 1 près les éléments de matrice non nuls de l'opérateur $\mathcal{W}$ dans l'espace des fonctions d'onde antisymétriques $\Phi(x^{(1)}, \ldots, x^{(f)})$ avec la base (5), (5 *a*).

De même, on a pour l'opérateur $\mathcal{V}$ de (4) :

$$\begin{aligned}&\left(\Phi_{[r_1\ldots r_{k'-1} r r_{k'+1}\ldots r_{k''-1}\bar{r} r_{k''+1}\ldots r_f]}, \mathcal{V}\Phi_{[r_1\ldots r_{k'-1} r_{k'} r_{k'+1}\ldots r_{k''-1} r_{k''} r_{k''+1}\ldots r_f]}\right)\\ &= \int\cdots\int \Phi^*_{[r_1\ldots r_{k'-1} r r_{k'+1}\ldots r_{k''-1}\bar{r} r_{k''+1}\ldots r_f]}\mathcal{V}\Phi_{[r_1\ldots r_{k'-1} r_{k'} r_{k'+1}\ldots r_{k''-1} r_{k''} r_{k''+1}\ldots r_f]}\,dx^{(1)}\ldots dx^{(f)}\\ &= (r\bar{r}\,|\,V\,|\,r_{k'}r_{k''}) - (r\bar{r}\,|\,V\,|\,r_{k''}r_{k'}).\end{aligned} \tag{8}$$

A chaque terme de $\Phi^*_{[r_1\ldots r_{k'-1} r r_{k'+1}\ldots r_{k''-1}\bar{r} r_{k''+1}\ldots r_f]}$ correspondent selon (5) deux termes dans le développement de $\Phi_{[r_1\ldots r_{k'-1} r_{k'} r_{k'+1}\ldots r_{k''-1} r_{k''} r_{k''+1}\ldots r_f]}$ tels que leur produit contribue à (8) par une valeur différente de zéro. Au terme contenant le facteur $\psi^*_r(x^{(i')})\,\psi^*_{\bar{r}}(x^{(i'')})$ correspondent ainsi les termes contenant les facteurs $\psi_{r_{k'}}(x^{(i')})\,\psi_{r_{k''}}(x^{(i'')})$ et $\psi_{r_{k'}}(x^{(i'')})\,\psi_{r_{k''}}(x^{(i')})$. Le premier a le même signe que le terme choisi de $\Phi^*_{[r_1\ldots r_{k'-1} r r_{k'+1}\ldots r_{k''-1}\bar{r} r_{k''+1}\ldots r_f]}$ et le produit correspondant contribue avec le terme $V(x^{(i')}, x^{(i'')})$ de $\mathcal{V}$ selon (4 *a*) et (5) par $\frac{1}{f!}(r\bar{r}\,|\,V\,|\,r_{k'}r_{k''})$ à (8). Le second a le signe opposé, et la contribution à (8) est $-\frac{1}{f!}(r\bar{r}\,|\,V\,|\,r_{k''}r_{k'})$ Les $f!$ termes de $\Phi^*_{[r_1\ldots r_{k'-1} r r_{k'+1}\ldots r_{k''-1}\bar{r} r_{k''+1}\ldots r_f]}$ fournissent la même contribution, ce qui conduit à (8). A un facteur ± 1 près (8) est égal à l'élément de matrice de l'opérateur $\mathcal{V}$ dans la représentation (5), (5 *a*).

Seconde quantification. L'espace $\bigwedge R$. Introduction des opérateurs à la manière habituelle. — Avec l'ordre lexicographique (5 *a*) des états r de l'espace R, on peut écrire par un simple changement de notation les coordonnées $c^{[r_1\ldots r_f]}$ d'un élément de l'espace $\overset{f}{\bigwedge} R$ des tenseurs antisymétriques de degré f sous la forme

$$\left.\begin{aligned}&g(n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots) = c^{[r_1\ldots r_f]},\\ &n_r = \begin{cases}1\\0\end{cases}\quad \text{pour}\quad r \begin{cases}=\\ \neq\end{cases} r_1, \ldots, r_f.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

C'est la notation habituelle de ces coefficients dans les travaux sur la seconde quantification. Dans le cas des tenseurs antisymétriques cependant cette notation est extrêmement incommode et nous garderons partout la notation $c^{[r_1\ldots r_f]}$ des coefficients.

La méthode de la seconde quantification caractérise dès le début l'état d'un système de f particules obéissant au principe d'exclusion par les éléments de l'espace $\overset{f}{\bigwedge} R$ des tenseurs antisymétriques de R. Elle considère cependant à la fois les tenseurs antisymétriques de différents degrés, correspondant à des nombres f différents de particules; l'espace des états est l'espace $\bigwedge R$, somme directe des espaces $\overset{f}{\bigwedge} R$ pour toutes les valeurs entières $f \geqq 0$, y compris les espaces $\overset{1}{\bigwedge} R = R$ et $\overset{0}{\bigwedge} R$, espace de dimension 1 des tenseurs antisymétriques de degré 0.

Les opérateurs de cet espace sont habituellement introduits comme suit [3, 4]. Avec la notation (9), on définit des opérateurs α_r, α^*_r par les relations

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_r g(n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots)\\ &\quad= \begin{cases} g(n_1, n_2, \ldots, n_r+1, \ldots) & \text{si}\quad n_r = 0,\\ 0 & \text{si}\quad n_r = 1;\end{cases}\\ &\alpha^*_r g(n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots)\\ &\quad= \begin{cases} 0 & \text{si}\quad n_r = 0,\\ g(n_1, n_2, \ldots, n_r-1, \ldots) & \text{si}\quad n_r = 1.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{10 a}$$

Les opérateurs α_r, α^*_r augmentent, et diminuent respectivement d'une unité le degré f d'un élément de $\overset{f}{\bigwedge} R$, ou donnent zéro. L'opérateur $\alpha_r\alpha^*_r = n_r$ correspond à une multiplication par 1 ou 0 selon que la valeur de n_r est 1 ou 0.

En définissant

$$\nu_r = \prod_{s=1}^{r}(1 - 2n_s), \tag{10 b}$$

où

$$(1 - 2n_s) = \begin{cases}+1\\-1\end{cases}\quad \text{pour}\quad n_s = \begin{cases}0\\1\end{cases}$$

les opérateurs de la théorie peuvent être exprimés à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation,

$$a_r = \nu_r\alpha_r, \qquad a^*_r = \alpha^*_r\nu_r, \tag{11}$$

qui satisfont aux relations d'anticommutation

$$a_r a_s + a_s a_r = 0, \qquad a^*_r a^*_s + a^*_s a^*_r = 0; \tag{11 a}$$
$$a_r a^*_s + a^*_s a_r = \delta_{rs}. \tag{11 b}$$

On démontre alors que dans le sous-espace $\overset{f}{\bigwedge} R$ de $\bigwedge R$ les opérateurs

$$\mathbf{W} = \sum_{rs}(r\,|\,W\,|\,s)\,a_r a^*_s, \tag{12}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{r\bar{r}\\ s\bar{s}}}(r\bar{r}\,|\,V\,|\,s\bar{s})\,a_r a_{\bar{r}} a^*_{\bar{s}} a^*_s, \tag{13}$$

formés à l'aide des éléments de matrice (3 *a*) et (4 *a*)

sont équivalents aux opérateurs (3), (4) de la méthode de l'espace de configuration. La vérification de cette équivalence est liée surtout à un examen des changements de signe des coefficients (9) à l'aide des fonctions de signe (10 *b*) de Wigner, mais par cette voie elle est assez laborieuse [3, 4].

En caractérisant les éléments de $\wedge R$ à l'aide de l'algèbre extérieure de Grassmann, les opérateurs a_r, a_r^* de (11) s'introduisent comme des opérations élémentaires du calcul. L'examen laborieux des changements de signe dans la vérification de l'équivalence des opérateurs des deux méthodes du formalisme quantique peut être évité, en comparant au lieu des éléments de matrice des opérateurs les produits scalaires (7), (8) dans les deux représentations.

Produit tensoriel, symétrique et antisymétrique (extérieur) des éléments de *R*. — Soient $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$ les éléments de base de l'espace vectoriel R. Les coefficients c_i^r d'un élément e_i de R sont des nombres complexes et e_i peut s'écrire sous la forme

$$e_i = \sum_r c_i^r a_r. \tag{14}$$

On peut définir le produit $e_{i_1} e_{i_2}$ de deux éléments e_{i_1}, e_{i_2} de R :

$$e_{i_1} e_{i_2} = \left(\sum_r c_{i_1}^r a_r\right)\left(\sum_r c_{i_2}^r a_r\right) = \sum_{r_1 r_2} c_{i_1}^{r_1} c_{i_2}^{r_2} a_{r_1} a_{r_2}, \tag{15}$$

en définissant les produits $a_{r_1} a_{r_2}$ des éléments de base.

En considérant les produits $a_{r_1} a_{r_2}$ comme des éléments de base nouveaux, sans aucune relation entre ces produits, (15) définit le produit tensoriel des éléments e_{i_1} et e_{i_2} de R, celui-ci étant caractérisé dans la base $a_{r_1} a_{r_2}$ par les coefficients $c_{i_1}^{r_1} c_{i_2}^{r_2}$. Les éléments de base $a_{r_1} a_{r_2}$ engendrent l'espace R^2 des tenseurs deux fois contravariants de R. Les produits $a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_f}$ de f facteurs engendrent l'espace R^f des tenseurs f fois contravariants.

Il y a deux espèces importantes de multiplication des éléments de R. La multiplication symétrique définie par les relations

$$a_{r_1} a_{r_2} - a_{r_2} a_{r_1} = 0 \tag{16}$$

et la multiplication antisymétrique définie par

$$a_{r_1} a_{r_2} + a_{r_2} a_{r_1} = 0. \tag{17}$$

Ces relations sont invariantes par rapport aux transformations du groupe linéaire de R. Pour $r_1 = r_2 = r$ la multiplication antisymétrique (17) donne

$$a_r a_r = a_r^2 = 0 \tag{17 a}$$

pour toute valeur de r.

La multiplication symétrique (16) fournit les tenseurs symétriques de R. Elle joue un grand rôle dans la théorie des fonctions algébriques et la théorie des fonctionnelles. Dans la Mécanique quantique elle conduit à la théorie des particules obéissant à la statistique de Bose-Einstein.

La multiplication antisymétrique ou extérieure (17) fournit les tenseurs antisymétriques de R. Cette multiplication joue un rôle fondamental dans la géométrie de l'espace R. Elle fournit l'outil mathématique adapté à la description d'un système de particules obéissant au principe d'exclusion.

L'espace $\wedge R$. Algèbre extérieure. — Dans ce qui suit, nous nous bornons à la multiplication extérieure (17), et nous écrivons pour le produit extérieur de a_{r_1} et a_{r_2} simplement $a_{r_1} a_{r_2}$ en omettant le signe habituel $\wedge$ ou $\times$. Les éléments de base $a_{r_1} a_{r_2}$, $r_1 < r_2$ engendrent l'espace $\overset{2}{\wedge} R$ des bivecteurs ou tenseurs antisymétriques deux fois contravariants de R. Le produit (15) de deux vecteurs devient en vertu de (17)

$$e_{i_1} e_{i_2} = \sum_{r_1 < r_2} \begin{vmatrix} c_{i_1}^{r_1} & c_{i_1}^{r_2} \\ c_{i_2}^{r_1} & c_{i_2}^{r_2} \end{vmatrix} a_{r_1} a_{r_2}. \tag{18 a}$$

Les produits $a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_f}$, $r_1 < \ldots < r_f$ de f facteurs engendrent l'espace $\overset{f}{\wedge} R$ des tenseurs antisymétriques f fois contravariants de R, espace des f-vecteurs. Le produit extérieur de f vecteurs est appelé un f-vecteur décomposable et s'écrit sous la forme

$$e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_f} = \sum_{r_1 < \ldots < r_f} \begin{vmatrix} c_{i_1}^{r_1} & \ldots & c_{i_1}^{r_f} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i_f}^{r_1} & \ldots & c_{i_f}^{r_f} \end{vmatrix} a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_f}. \tag{18}$$

La somme directe des espaces $\overset{f}{\wedge} R$,

$$\wedge R = \sum_{f=0}^{\infty} \overset{f}{\wedge} R,$$

est l'espace des tenseurs antisymétriques contravariants de différents degrés de R, y compris l'espace $\overset{1}{\wedge} R = R$ et l'espace $\overset{0}{\wedge} R$ à une seule dimension, constitué par les nombres complexes. Un élément de $\wedge R$ peut s'écrire sous la forme

$$c = \sum_{f=0} \sum_{r_1 < \ldots < r_f} c^{[r_1 \ldots r_f]} a_{r_1} \ldots a_{r_f}. \tag{19}$$

Le produit extérieur d'un f_1-vecteur et d'un f_2-vecteur est un $(f_1 + f_2)$-vecteur. Un f-vecteur décomposable (18) définit un sous-espace à f dimensions de R, engendré par les éléments $e_{i_1}, \ldots, e_{i_f}$ et le produit extérieur de (18) avec les vecteurs de ce

sous-espace est nul. Pour que le produit extérieur d'un f_1-vecteur et d'un f_2-vecteur décomposables soit différent de zéro, il faut et il suffit que les sous-espaces correspondants n'aient pas d'éléments communs. C'est l'origine de l'expression « produit extérieur ». Il s'ensuit que les éléments de $\overset{f}{\wedge} R_n$, où R_n est un sous-espace à n dimensions de R, sont avec $f > n$ identiquement nuls.

Le produit extérieur permet de définir sur $\wedge R$ une structure d'algèbre, l'algèbre extérieure de l'espace R.

Un changement de base de R peut être caractérisé par la matrice (c^r_l) d'une transformation inversible C de R qui fait correspondre aux éléments de base a_r de nouveaux éléments de base e_l selon des équations de la forme (14). Les éléments de base de $\overset{2}{\wedge} R$ et de $\overset{f}{\wedge} R$ se transforment alors selon les équations (18 a) et (18). Comme cas spécial, cela s'applique également aux transformations unitaires de R, caractérisant les changements de base dans le formalisme quantique.

Les espaces duals R^* et $\wedge R^*$. — L'ensemble des formes linéaires sur R définit l'espace vectoriel R^*, espace des vecteurs covariants de R, ou espace dual de R. Un vecteur e^*_l de R^*, vecteur covariant ou dual de R, peut à l'aide de la base a^*_1, a^*_2, ..., a^*_r, ..., duale de la base a_1, a_2, ..., a_r, ... de R, être écrit sous la forme

$$e^*_l = \sum_r c^l_r a^*_r. \qquad (20)$$

En définissant la multiplication extérieure des éléments de base a^*_r par les relations

$$a^*_{r_2} a^*_{r_1} + a^*_{r_1} a^*_{r_2} = 0 \qquad (21)$$

les nouveaux éléments de base $a^*_{r_2} a^*_{r_1}$, $r_1 < r_2$ engendrent l'espace $\overset{2}{\wedge} R^*$ des tenseurs antisymétriques deux fois covariants de R, les produits $a^*_{r_f} \dots a^*_{r_2} a^*_{r_1}$, $r_1 < \dots < r_f$ de f facteurs, l'espace $\overset{f}{\wedge} R^*$ des tenseurs antisymétriques f fois covariants. Un f-vecteur dual décomposable, produit extérieur de f vecteurs duals e^*_l, s'écrit sous la forme

$$e^*_{l_f} \dots e^*_{l_2} e^*_{l_1} = \sum_{r_1 < \dots < r_f} \begin{vmatrix} c^{l_1}_{r_1} & \dots & c^{l_1}_{r_f} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{l_f}_{r_1} & \dots & c^{l_f}_{r_f} \end{vmatrix} a^*_{r_f} \dots a^*_{r_2} a^*_{r_1}. \qquad (22)$$

La somme directe $\wedge R^* = \sum_{f=0}^{\infty} \overset{f}{\wedge} R^*$, espace des tenseurs antisymétriques covariants de différents degrés de R, est le dual de l'espace vectoriel $\wedge R$.

Un élément de $\wedge R^*$ a la forme

$$\mathbf{c}^* = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \dots < r_f} c_{[r_1 \dots r_f]} a^*_{r_f} \dots a^*_{r_1}. \qquad (23)$$

A un changement de base C de R correspond la transformation $\tilde{C}^{-1}$ de R^*, inverse de la transposée de C. Si C est une transformation unitaire, $C^* = C$, $\tilde{C}^{-1}$ est la complexe conjuguée de C, et les composantes c_r d'un élément de R^* se transforment comme les complexes conjugués $\bar{c}^r$ des composantes d'un élément de R. En vertu de cette relation, du point de vue des transformations unitaires, l'élément de R^* de coefficients $c_r = \bar{c}^r$ peut être considéré comme le dual du vecteur de coefficients c^r de R. Par la même correspondance on peut relier à chaque élément de $\wedge R$ un élément dual en $\wedge R^*$. Cette correspondance n'est invariante cependant que pour les transformations unitaires de R.

Remarquons encore que dans un espace R_n de dimension n finie il existe un isomorphisme entre les vecteurs duals et les $(n-1)$-vecteurs de R_n, et plus généralement entre les f-vecteurs duals et les $(n-f)$-vecteurs. Au sous-espace de R_n défini par un $(n-1)$-vecteur, qui est toujours décomposable, appartient un vecteur complémentaire; multiplié extérieurement par celui-ci, le $(n-1)$-vecteur donne l'élément $E_n = a_1 a_2 \dots a_n$, base de $\overset{n}{\wedge} R_n$. Un $(n-1)$-vecteur peut donc être considéré comme un « trou » dans le tenseur complet E_n. L'élément isomorphe à ce « trou » est un vecteur dual de R_n. On peut voir déjà dans cette remarque, comment l'introduction des éléments duals d'un sous-espace de R peut remplacer dans la théorie du positron la notion peu physique d'un trou dans une infinité d'électrons d'énergie négative.

Produit scalaire. — Le produit scalaire d'un f-vecteur

$$\mathbf{v}_f = \sum_{r_1 < \dots < r_f} v^{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f}$$

et d'un f-vecteur dual

$$\mathbf{u}^*_f = \sum_{r_1 < \dots < r_f} u_{[r_1 \dots r_f]} a^*_{r_f} \dots a^*_{r_1}$$

est défini par

$$(\mathbf{u}^*_f, \mathbf{v}_f) = \sum_{r_1 < \dots < r_f} u_{[r_1 \dots r_f]} v^{[r_1 \dots r_f]}. \qquad (24\,a)$$

Le produit scalaire d'un élément

$$\mathbf{v} = \sum_{f=0}^{\infty} \mathbf{v}_f$$

de $\wedge R$ et d'un élément

$$\mathbf{u}^* = \sum_{f=0}^{\infty} \mathbf{u}_f^*$$

de $\wedge R^*$ est

$$\langle \mathbf{u}^* | \mathbf{v} \rangle = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \ldots < r_f} u_{[r_1 \ldots r_f]} v^{[r_1 \ldots r_f]}. \qquad (24)$$

Les espaces R et $\wedge R$ sont en Mécanique quantique des espaces de Hilbert. Pour ceux-ci on définit le produit scalaire des éléments

$$\mathbf{u} = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \ldots < r_f} u^{[r_1 \ldots r_f]} a_{r_1} \ldots a_{r_f}$$

et

$$\mathbf{v} = \sum_{=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \ldots < r_f} v^{[r_1 \ldots r_f]} a_{r_1} \ldots a_{r_f}$$

par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \ldots < r_f} \bar{u}^{[r_1 \ldots r_f]} v^{[r_1 \ldots r_f]}. \qquad (25)$$

Ce produit scalaire n'est invariant que par rapport aux transformations unitaires de R, et en faisant correspondre à chaque élément $\mathbf{u}$ de $\wedge R$ un élément dual $\mathbf{u}^*$ de $\wedge R^*$ par la relation

$$u_{[r_1 \ldots r_f]} = \bar{u}^{[r_1 \ldots r_f]}, \qquad (26)$$

le produit scalaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de (25) est identique au produit scalaire $\langle \mathbf{u}^* | \mathbf{v} \rangle$ défini par (24).

Pour des éléments normés de $\wedge R$, on a

$$(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \ldots < r_f} \left| c^{[r_1 \ldots r_f]} \right|^2 = 1. \qquad (19\,a)$$

Pour les éléments (19) de $\wedge R$ la somme (19 *a*) doit être convergente.

Opérateurs linéaires de $\wedge R$. — Introduisons maintenant les opérateurs linéaires de l'espace $\wedge R$. Nous employons les mêmes symboles pour les opérateurs et pour les éléments de l'espace $\wedge R$ que nous séparons par un trait |. Quand c'est nécessaire, nous pouvons toujours mettre un trait après un symbole pour désigner l'opérateur.

Ainsi, la multiplication extérieure déjà définie par un vecteur peut être considéré comme un opérateur linéaire de $\wedge R$, et nous écrivons

$$a_r | a_{r_1} \ldots a_{r_f} = a_r a_{r_1} \ldots a_{r_f} \quad (= 0, \text{ si } r = r_k). \qquad (27)$$

L'opérateur $a_r|$ augmente donc le degré d'un tenseur d'une unité et donne zéro si l'on applique à un f-vecteur décomposable contenant comme facteur a_r. On reconnaît l'opérateur de création de la seconde quantification qui apparaît ici d'une façon tout à fait naturelle. Si R est l'espace des états d'une seule particule, l'opérateur a_r crée une particule dans l'état r ou donne zéro si cet état est occupé.

D'autre part, on peut définir une espèce de division sans reste (²)

$$a_s^* \, a_{r_1} \ldots a_{r_f} = \begin{cases} (-1)^{k-1} a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f} & \text{si } s = r_k, \\ 0 & \text{si } s \neq r_k, \end{cases} \qquad (28)$$

qui diminue le rang d'un f-vecteur d'une unité et appliquée à un f-vecteur décomposable donne zéro si celui-ci ne contient pas a_s comme facteur. L'opérateur a_s^* est l'opérateur d'annihilation de la seconde quantification. On peut introduire cette opération sans faire apparaître explicitement le facteur $(-1)^{k-1}$ en le définissant pour $s = r_1$ et le cas $s = r_k$ peut être ramené à $s = r_1$ en amenant le facteur a_{r_k} à la première place à l'aide de la règle d'anticommutation du produit extérieur.

L'opération (28) correspond [1, 2] à la multiplication intérieure de Grassmann et de Bourbaki par le vecteur dual a_s^*. Ceci justifie l'emploi du même symbole pour cet opérateur et les éléments de R^*. La relation de l'opérateur a_s^* avec les vecteurs duals devient claire en appliquant a_s^* aux éléments de R ($f = 1$); on a selon (28)

$$a_s^* | a_r = \begin{cases} 1 & \text{si } s = r, \\ 0 & \text{si } s \neq r. \end{cases} \qquad (28\,a)$$

L'opérateur $a_{q_1} a_{q_2} \ldots a_{q_k}|$ est défini à l'aide de (27) par l'application successive de ses facteurs et correspond à la multiplication extérieure par un k-vecteur décomposable. L'opérateur $a_{s_k}^* \ldots a_{s_2}^* a_{s_1}^*$ est défini par l'application successive de (28) et représente une espèce de division sans reste par un k-vecteur décomposable.

La règle d'anticommutation (17) du produit extérieur a comme conséquence les mêmes règles (11*a*) pour les opérateurs. D'autre part, en appliquant successivement (27) et (28), on a pour $r \neq s$:

$$\left. \begin{aligned} & a_r a_s^* | a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f} \\ & \quad = \begin{cases} a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f} & \text{si } s = r_k, \quad r \neq r_{k'}, \\ 0 & \text{si } s \neq r_k \text{ ou } r = r_{k'}; \end{cases} \\ & a_s^* a_r | a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f} \\ & \quad = \begin{cases} -a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f} & \text{si } s = r_k, \quad r \neq r_{k'}, \\ 0 & \text{si } s \neq r_k \text{ ou } r = r_{k'}; \end{cases} \end{aligned} \right\} \qquad (29\,a)$$

(²) C'est M. Marcel Riesz qui m'a fait observer qu'il est suggestif du point de vue algébrique de considérer l'opération a_s^* comme une espèce de division sans reste. Je le remercie chaleureusement de l'occasion qu'il m'a offerte de discuter avec lui certains aspects de ce travail.

et pour $r = s$:

$$\left.\begin{aligned} & a_r a_r^* \mid a_{r_1}\dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}}\dots a_{r_f} \\ & \quad = \begin{cases} a_{r_1}\dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}}\dots a_{r_f} & \text{si } r = r_k, \\ 0 & \text{si } r \neq r_k, \end{cases} \\ & a_r^* a_r \mid a_{r_1}\dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}}\dots a_{r_f} \\ & \quad = \begin{cases} 0 & \text{si } r = r_k, \\ a_{r_1}\dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}}\dots a_{r_f} & \text{si } r \neq r_k. \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (29\,b)$$

Pour la somme de ces opérateurs, on obtient les relations (11 b)

$$a_r a_s^* + a_s^* a_r = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq s, \\ 1 & \text{si } r = s. \end{cases}$$

L'opérateur $n_r = a_r a_r^*$ de (29 b) a les valeurs propres 1, 0 et il est le projecteur du sous-espace de $\wedge R$ dont les éléments contiennent le facteur a_r. Dans le language de la Mécanique quantique c'est le sous-espace des états du système dans lesquels l'état r est occupé par un électron. L'opérateur $1 - n_r = a_r a_r^*$ de (29 b) est le projecteur du sous-espace complémentaire de $\wedge R$. Pour l'opérateur

$$\mathbf{N} = \sum_r a_r a_r^* = \sum_r n_r, \qquad (30)$$

on a selon (29 b)

$$\mathbf{N} \mid a_{r_1}\dots a_{r_f} = f\, a_{r_1}\dots a_{r_f}. \qquad (30\,a)$$

$\mathbf{N}$ est un opérateur ayant les valeurs propres $f = 0, 1, 2, \dots$ qui caractérisent le degré d'un f-vecteur. Il représente en Mécanique quantique l'opérateur du nombre de particules.

Opérateurs réductibles aux sous-espaces $\overset{f}{\wedge} R$. — Tout opérateur linéaire de $\wedge R$ peut être exprimé à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation a_q, a_s^* comme une somme de produits de facteurs a_q, a_s^* multipliés par des nombres complexes. Les opérateurs qui ne changent pas le degré f des tenseurs et qui sont ainsi réductibles aux sous-espaces $\overset{f}{\wedge} R$, commutent avec l'opérateur $\mathbf{N}$ de (30). Chaque terme de ceux-ci contient un nombre égal de facteurs a_q et a_s^*. A l'aide des relations d'anticommutation (11 a, b) on peut ramener ces opérateurs à la forme

$$\mathbf{A} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\substack{q_1 q_2 \dots q_i \\ s_1 s_2 \dots s_i}} A^{q_1 q_2 \dots q_i}_{s_1 s_2 \dots s_i} a_{q_1} a_{q_2} \dots a_{q_i} a_{s_i}^* \dots a_{s_2}^* a_{s_1}^*, \qquad (31)$$

dans laquelle les opérateurs de création a_q sont dans chaque terme à la gauche des opérateurs d'annihilation a_s^*. Les termes avec un nombre i de facteurs a_s^* donnent selon (28) identiquement zéro dans le sous-espace $\sum_{f=0}^{i-1} \overset{f}{\wedge} R$ de $\wedge R$ des tenseurs du degré $f < i$.

L'effet des termes de (31) se déduit facilement des relations (27), (28). Le terme avec $i = 0$ correspond à la multiplication par une constante. L'opérateur $a_q a_s^*$ des termes avec $i = 1$ a selon (29 a, b) comme effet de remplacer le facteur a_s par le facteur a_q dans $a_{r_1}\dots a_{r_f}$ et de le multiplier par 0 s'il ne contient pas le facteur a_s.

Pour $i = 2$, on a d'une façon analogue

$$\begin{aligned} & a_{q_1} a_{q_2} a_{s_2}^* a_{s_1}^* \mid a_{r_1}\dots a_{r_{k'-1}} a_{r_{k'}} a_{r_{k'+1}}\dots a_{r_{k''-1}} a_{r_{k''}} a_{r_{k''+1}}\dots a_{r_f} \\ & = \begin{cases} a_{r_1}\dots a_{r_{k'-1}} a_{q_1} a_{r_{k'+1}}\dots a_{r_{k''-1}} a_{q_2} a_{r_{k''+1}}\dots a_{r_f} & \text{si } \begin{cases} s_1 = r_{k'};\ q_1 \\ s_2 = r_{k''};\ q_2 \end{cases} \neq r_k \quad \text{pour } k \neq k', k'' \ (k' \lessgtr k''), \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \end{aligned} \qquad (32)$$

Si $q_2 \neq s_1$,

$$a_{q_1} a_{q_2} a_{s_2}^* a_{s_1}^* = a_{q_1} a_{s_1}^* a_{q_2} a_{s_2}^*,$$

et (32) résulte par l'application successive de (29a, b). Si $q_2 = s_1$, on peut appliquer le même raisonnement pour

$$a_{q_1} a_{q_2} a_{s_2}^* a_{s_1}^* = - a_{q_1} a_{s_2}^* a_{q_2} a_{s_1}^*$$

et faire disparaître le signe — en interchangeant dans le résultat a_{q_1}, a_{q_2}. De même,

$$\begin{aligned} & a_{q_1} a_{q_2} \dots a_{q_i} a_{s_i}^* \dots a_{s_2}^* a_{s_1}^* \mid a_{r_1}\dots a_{r_f} \\ & = \begin{cases} a_{r_1}\dots a_{r_{k_1-1}} a_{q_1} a_{r_{k_1+1}} \dots a_{r_{k_2-1}} a_{q_2} a_{r_{k_2+1}} \dots a_{r_{k_i-1}} a_{q_i} a_{r_{k_i+1}} \dots a_{r_f} & \text{si } \begin{cases} s_1 = r_{k_1};\ q_1 \\ s_2 = r_{k_2};\ q_2 \\ \dots\dots,\ \dots \\ s_i = r_{k_i};\ q_i \end{cases} \neq r_k \quad \text{pour } r_k \neq r_{k_\alpha} \ (\alpha = 1, 2, \dots, i). \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \end{aligned} \qquad (33)$$

On n'a $r_{k_1} < r_{k_2} < \dots < r_{k_i}$ que si $s_1 < s_2 < \dots < s_i$, autrement on doit écrire $a_{q_1}, \dots, a_{q_i}$ en (33) dans un ordre différent. Si $a_{r_1}\dots a_{r_f}$ contient les i facteurs $a_{s_1}, \dots, a_{s_i}$, l'opérateur $a_{q_1}\dots a_{q_i} a_{s_i}^* \dots a_{s_1}^*$ les remplace par $a_{q_1}, \dots, a_{q_i}$. S'il ne les contient pas, le résultat est zéro.

Opérateurs du type $\mathbf{W} = \sum_{r,s} (r \mid \mathbf{W} \mid s)\, a_r a_s^*$. — Abstraction faite de la multiplication par une constante, les opérateurs les plus simples de $\wedge R$ qui conservent le degré f des tenseurs sont de la

forme (12)

$$\mathbf{W} = \sum_{rs} (r \,|\, W \,|\, s)\, a_r a_s^*.$$

Selon (29 *a*, *b*), on a

$$\mathbf{W} \,|\, a_{r_1} \ldots a_{r_f} \rangle = \sum_{r} \sum_{k=1}^{f} (r \,|\, W \,|\, r_k)\, a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f}. \quad (34)$$

Le produit scalaire de (34) et du dual de $a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f}$ est

$$\langle a^*_{r_f} \ldots a^*_{r_{k+1}} a^*_r a^*_{r_{k-1}} \ldots a^*_{r_1} \,|\, \mathbf{W} \,|\, a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f} \rangle = (r \,|\, W \,|\, r_k). \quad (35)$$

Pour $f = 1$, (35) s'écrit

$$\langle a_r^* \,|\, \mathbf{W} \,|\, a_{r_k} \rangle = (r \,|\, W \,|\, r_k). \quad (35\,a)$$

Le f-vecteur décomposable $a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f}$ peut différer par une puissance de -1 de l'élément de base de $\overset{f}{\wedge} R$ pour lequel l'ordre des facteurs suit l'ordre lexicographique (5 *a*). A ce facteur ± 1 près, (35) donne l'élément de matrice de $\mathbf{W}$ dans la base choisie de $\wedge R$. Les éléments de matrice de $\mathbf{W}$ entre des éléments de base de degré différent sont nuls.

Opérateurs du type

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{r\bar{r} \\ s\bar{s}}} (r\bar{r} \,|\, V \,|\, s\bar{s})\, a_r a_{\bar{r}} a_{\bar{s}}^* a_s^*.$$

Considérons maintenant l'opérateur (13),

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{r\bar{r} \\ s\bar{s}}} (r\bar{r} \,|\, V \,|\, s\bar{s})\, a_r a_{\bar{r}} a_{\bar{s}}^* a_s^*.$$

Remarquons d'abord que le même facteur $a_r a_{\bar{r}} a_{\bar{s}}^* a_s^*$ figure dans cette forme de l'opérateur quatre fois. On a en effet,

$$\begin{aligned} a_r a_{\bar{r}} a_{\bar{s}}^* a_s^* &= a_{\bar{r}} a_r a_s^* a_{\bar{s}}^* \\ &= -a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^* = -a_{\bar{r}} a_r a_{\bar{s}}^* a_s^*. \end{aligned} \quad (36)$$

Avec

$$\langle r\bar{r} \,|\, V \,|\, s\bar{s} \rangle = \frac{1}{2} \{ (r\bar{r} \,|\, V \,|\, s\bar{s}) + (\bar{r}r \,|\, V \,|\, \bar{s}s) - (r\bar{r} \,|\, V \,|\, \bar{s}s) - (\bar{r}r \,|\, V \,|\, s\bar{s}) \}, \quad (37\,a)$$

on peut écrire l'opérateur $\mathbf{V}$ sous une forme dans laquelle les facteurs $a_r, a_{\bar{r}}, a_{\bar{s}}^*, a_s^*$ ne figurent qu'une seule fois

$$\mathbf{V} = \sum_{\substack{r<\bar{r} \\ s<\bar{s}}} \langle r\bar{r} \,|\, V \,|\, s\bar{s} \rangle\, a_r a_{\bar{r}} a_{\bar{s}}^* a_s^*. \quad (37)$$

Si l'on a

$$(r\bar{r} \,|\, V \,|\, s\bar{s}) = (\bar{r}r \,|\, V \,|\, \bar{s}s), \quad (38\,a)$$

(37 *a*) s'écrit

$$\langle r\bar{r} \,|\, V \,|\, s\bar{s} \rangle = (r\bar{r} \,|\, V \,|\, s\bar{s}) - (r\bar{r} \,|\, V \,|\, \bar{s}s). \quad (38\,b)$$

Selon (32), on a

$$\mathbf{V} \,|\, a_{r_1} \ldots a_{r_f} = \sum_{r<\bar{r}} \sum_{k''>k'=1}^{f} \langle r\bar{r} \,|\, V \,|\, r_{k'} r_{k''} \rangle\, a_{r_1} \ldots a_{r_{k'-1}} a_r a_{r_{k'+1}} \ldots a_{r_{k''-1}} a_{\bar{r}} a_{r_{k''+1}} \ldots a_{r_f}. \quad (39)$$

Le produit scalaire de (39) et du dual de $a_{r_1} \ldots a_{r_{k'-1}} a_r a_{r_{k'+1}} \ldots a_{r_{k''-1}} a_{\bar{r}} a_{r_{k''+1}} \ldots a_{r_f}$ est

$$\langle a^*_{r_f} \ldots a^*_{r_{k''+1}} a^*_{\bar{r}} a^*_{r_{k''-1}} \ldots a^*_{r_{k'+1}} a^*_r a^*_{r_{k'-1}} \ldots a^*_{r_1} \,|\, \mathbf{V} \,|\, a_{r_1} \ldots a_{r_{k'-1}} a_{r_{k'}} a_{r_{k'+1}} \ldots a_{r_{k''-1}} a_{r_{k''}} a_{r_{k''+1}} \ldots a_{r_f} \rangle = \langle r\bar{r} \,|\, V \,|\, r_{k'} r_{k''} \rangle. \quad (40)$$

A un facteur ± 1 près, (40) donne les éléments de matrice différents de zéro de l'opérateur $\mathbf{V}$ dans la base choisie de $\wedge R$. Pour $f = 2$, on a

$$\langle a_{\bar{r}}^* a_r^* \,|\, \mathbf{V} \,|\, a_{r_{k'}} a_{r_{k''}} \rangle = \langle r\bar{r} \,|\, V \,|\, r_{k'} r_{k''} \rangle. \quad (40\,a)$$

Comme $r < \bar{r}$, $r_{k'} < r_{k''}$, les $\langle r\bar{r} \,|\, V \,|\, r_{k'} r_{k''} \rangle$ sont les éléments de matrice de l'opérateur $\mathbf{V}$ dans l'espace $\overset{2}{\wedge} R$ des 2-vecteurs.

La correspondance entre les opérateurs de la méthode de l'espace de configuration et de la seconde quantification. — L'état d'un système de particules obéissant au principe d'exclusion est caractérisé par un élément de l'espace $\overset{f}{\wedge} R$ et peut être écrit sous la forme (19). Les opérateurs de cet espace sont les opérateurs introduits dans la méthode de la seconde quantification.

En comparant les expressions (35) et (7), ainsi que les expressions (40), (38 *b*) et (8), qui diffèrent par la même puissance de -1 des éléments de matrice correspondants, on voit immédiatement l'équivalence dans le sous-espace $\overset{f}{\wedge} R$ des opérateurs

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W} &= \sum_{rs} (r \,|\, W \,|\, s)\, a_r a_s^*, \\ (r \,|\, W \,|\, s) &= \int \psi_r^*(x)\, W(x)\, \psi_s(x)\, dx, \\ \mathcal{W} &= \sum_{k=1}^{f} W_k = \sum_{k=1}^{f} W(x_k), \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

de la seconde quantification et de la méthode de l'espace de configuration, ainsi que l'équivalence des opérateurs

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{V} = \frac{1}{2}\sum (r\bar{r}\,|\,V\,|\,s\bar{s})\,a_r a_{\bar{r}} a_{\bar{s}}^* a_s^*, \\ &(r\bar{r}\,|\,V\,|\,s\bar{s}) \\ &\quad = \iint \psi_r^*(x)\,\psi_{\bar{r}}^*(x')\,V(x, x')\,\psi_s(x)\,\psi_{\bar{s}}(x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x', \\ &\mathcal{V} = \sum_{i<k=1}^{f} V_{ik} = \sum_{i<k=1}^{f} V(x_i, x_k) \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

des deux méthodes. Il est facile d'étendre la correspondance aux opérateurs plus généraux de la forme (31).

Les équations u = W c. — Le rôle des opérateurs de la seconde quantification et l'équivalence des opérateurs des deux méthodes peuvent être encore rendus plus clairs en explicitant les équations vectorielles correspondantes. Ces équations fournissent en même temps un exemple de calcul simple portant sur les états du système.

La notation $c^{[r_1 \ldots r_f]}$ des coefficients des tenseurs antisymétriques au lieu de la notation (9) a d'une part l'avantage d'être plus simple parce que parmi les indices ne figurent que les états occupés. D'autre part, en gardant cette notation, on peut inclure un signe (—) dans les coefficients par la convention

$$c^{[r_1 \ldots r_{k+1} r_k \ldots r_f]} = - c^{[r_1 \ldots r_k r_{k+1} \ldots r_f]} \quad (43)$$

et définir ainsi $c^{[r_1 \ldots r_f]}$ pour toute permutation des indices $r_1, \ldots, r_f$. Par cette convention, on peut écrire sous une forme simple des équations dont la notation deviendrait extrêmement compliquée si l'on voulait garder les coefficients (9) et indiquer explicitement les puissances de (— 1) qui interviennent dans ces équations. (43) correspond à la notation des coefficients des tenseurs antisymétriques dans l'espace R^f ce qui peut être avantageux même en se bornant au sous-espace $\overset{f}{\wedge} R$ de R^f. On peut écrire également

$$\begin{aligned} &c^{[r_1 \ldots r_{k+1} r_k \ldots r_f]} a_{r_1} \ldots a_{r_{k+1}} a_{r_k} \ldots a_{r_f} \\ &\quad = c^{[r_1 \ldots r_k r_{k+1} \ldots r_f]} a_{r_1} \ldots a_{r_k} a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f}, \end{aligned} \quad (44\,a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_f &= \sum_{r_1 < \ldots < r_f} c^{[r_1 \ldots r_f]} a_{r_1} \ldots a_{r_f} \\ &= \frac{1}{f!} \sum c^{[r_1 \ldots r_f]} a_{r_1} \ldots a_{r_f}. \end{aligned} \quad (44)$$

La possibilité de remplacer un signe (—) par une modification de l'ordre des facteurs d'un produit extérieur nous a permis d'éviter un long examen des changements de signe dans la vérification de l'équivalence des opérateurs (41), (42). Selon (44 *a*) on fait usage de la même possibilité en introduisant la notation (43).

Pour un élément $\mathbf{c}_0$ de $\overset{0}{\wedge} R$, on a

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{W} \,|\, \mathbf{c}_0 = 0. \quad (45)$$

Pour un vecteur de $\overset{1}{\wedge} R = R$,

$$\mathbf{c}_1 = \sum_{r_1} c^{r_1} a_{r_1}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \sum_{r_1} u^{r_1} a_{r_1} = \mathbf{W} \,|\, \mathbf{c}_1 \\ &= \sum_{r_1 s} (r_1 \,|\, W \,|\, s)\, a_{r_1} a_s^* \,|\, \sum_r c^r a_r \\ &= \sum_{r_1} \left\{ \sum_r (r_1 \,|\, W \,|\, r)\, c^r \right\} a_{r_1}, \end{aligned} \quad (46\,a)$$

$$u^{r_1} = \sum_r (r_1 \,|\, W \,|\, r)\, c^r. \quad (46\,b)$$

Comme on le voit déjà par (35 *a*), **W** est dans l'espace $\overset{1}{\wedge} R = R$ un opérateur ayant les éléments de matrice $(r_1 \,|\, W \,|\, r)$.

Pour un élément de $\overset{2}{\wedge} R$ on a, en faisant usage de (44),

$$\mathbf{c}_2 = \sum_{r_1 < r_2} c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \sum_{r_1 < r_2} u^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2} = \mathbf{W} \,|\, \mathbf{c}_2 \\ &= \sum_{rs} (r \,|\, W \,|\, s)\, a_r a_s^* \,|\, \frac{1}{2!} \sum_{r_1 r_2} c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2} \\ &= \sum_r \frac{1}{2!} \sum_{r_1 r_2} [(r \,|\, W \,|\, r_1)\, c^{[r_1 r_2]} a_r a_{r_2} + (r \,|\, W \,|\, r_2)\, c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_r] \\ &= \frac{1}{2!} \sum_{r_1 r_2} \left\{ \sum_r (r_1 \,|\, W \,|\, r)\, c^{[r r_2]} + (r_2 \,|\, W \,|\, r)\, c^{[r_1 r]} \right\} a_{r_1} a_{r_2} \\ &= \sum_{r_1 < r_2} \left\{ \sum_r (r_1 \,|\, W \,|\, r)\, c^{[r r_2]} + (r_2 \,|\, W \,|\, r)\, c^{[r_1 r]} \right\} a_{r_1} a_{r_2}, \end{aligned} \quad (47\,a)$$

$$u^{[r_1 r_2]} = \sum_r \{ (r_1 \,|\, W \,|\, r)\, c^{[r r_2]} + (r_2 \,|\, W \,|\, r)\, c^{[r_1 r]} \}. \quad (47\,b)$$

Pour un élément (44) de $\overset{f}{\wedge} R$, on calcule de la

même façon

$$\mathbf{u}_f = \sum_{r_1<\ldots<r_f} u^{[r_1\ldots r_f]} a_{r_1}\ldots a_{r_f} = \mathbf{W}\,|\,\mathbf{c}_f = \frac{1}{f!}\sum_{r}\sum_{r_1\ldots r_f}\sum_{k=1}^{f}(r\,|\,W\,|\,r_k)\,c^{[r_1\ldots r_{k-1} r_k r_{k+1}\ldots r_f]} a_{r_1}\ldots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}}\ldots a_{r_f}$$

$$= \frac{1}{f!}\sum_{r_1\ldots r_f}\left\{\sum_{k=1}^{f}\sum_{r}(r_k\,|\,W\,|\,r)\,c^{[r_1\ldots r_{k-1} r r_{k+1}\ldots r_f]}\right\} a_{r_1}\ldots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}}\ldots a_{r_f}$$

$$= \sum_{r_1<\ldots<r_f}\left\{\sum_{k=1}^{f}\sum_{r}(r_k\,|\,W\,|\,r)\,c^{[r_1\ldots r_{k-1} r r_{k+1}\ldots r_f]}\right\} a_{r_1}\ldots a_{r_f}, \tag{48 a}$$

$$u^{[r_1\ldots r_f]} = \sum_{k=1}^{f}\sum_{r}(r_k\,|\,W\,|\,r)\,c^{[r_1\ldots r_{k-1} r r_{k+1}\ldots r_f]}. \tag{48 b}$$

Les équations $\mathbf{v} = \mathbf{V}\,|\,\mathbf{c}$. — Avec l'opérateur $\mathbf{V}$ de (37), on a pour $f = 0$, $f = 1$:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{V}\,|\,\mathbf{c}_0 = 0, \tag{49}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}\,|\,\mathbf{c}_1 = 0. \tag{50}$$

Pour un élément $\mathbf{c}_2$ de $\overset{2}{\wedge} R$, on calcule

$$\mathbf{v}_2 = \sum_{r_1<r_2} v^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2} = \mathbf{V}\,|\,\mathbf{c}_2$$

$$= \sum_{\substack{r<\bar r\\ s<\bar s}}\langle r\bar r\,|\,V\,|\,s\bar s\rangle\, a_r a_{\bar r} a_{\bar s}^{*} a_s^{*}\,|\sum_{r_1<r_2} c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2}$$

$$= \sum_{r<\bar r}\sum_{r_1<r_2}\langle r\bar r\,|\,V\,|\,r_1 r_2\rangle\, c^{[r_1 r_2]} a_r a_{\bar r}$$

$$= \sum_{r_1<r_2}\left\{\sum_{r<\bar r}\langle r_1 r_2\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r\bar r]}\right\} a_{r_1} a_{r_2}, \tag{51 a}$$

$$v^{[r_1 r_2]} = \sum_{r<\bar r}\langle r_1 r_2\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r\bar r]}. \tag{51 b}$$

En utilisant la relation

$$\sum_{\substack{r_1<r_2\\ r_3}} f(r_1 r_2 r_3) = \sum_{r_1<r_2<r_3}\{f(r_1 r_2 r_3) + f(r_1 r_3 r_2) + f(r_2 r_3 r_1)\},$$

on a pour un élément $\mathbf{c}_3$ de $\overset{3}{\wedge} R$:

$$\mathbf{v}_3 = \sum_{r_1<r_2<r_3} v^{[r_1 r_2 r_3]} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} = \mathbf{V}\,|\,\mathbf{c}_3 = \sum_{\substack{r<\bar r\\ s<\bar s}}\langle r\bar r\,|\,V\,|\,s\bar s\rangle\, a_r a_{\bar r} a_{\bar s}^{*} a_s^{*}\,|\sum_{r_1<r_2<r_3} c^{[r_1 r_2 r_3]} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}$$

$$= \sum_{r<\bar r}\sum_{r_1<r_2<r_3}\left[\langle r\bar r\,|\,V\,|\,r_1 r_2\rangle\, c^{[r_1 r_2 r_3]} a_r a_{\bar r} a_{r_3} + \langle r\bar r\,|\,V\,|\,r_1 r_3\rangle\, c^{[r_1 r_2 r_3]} a_r a_{\bar r} a_{r_2} + \langle r\bar r\,|\,V\,|\,r_2 r_3\rangle\, c^{[r_2 r_3 r_1]} a_r a_{\bar r} a_{r_1}\right]$$

$$= \sum_{r<\bar r}\sum_{\substack{r_1<r_2\\ r_3}}\langle r\bar r\,|\,V\,|\,r_1 r_2\rangle\, c^{[r_1 r_2 r_3]} a_r a_{\bar r} a_{r_3} = \sum_{\substack{r_1<r_2\\ r_3}}\left\{\sum_{r<\bar r}\langle r_1 r_2\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r\bar r r_3]}\right\} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}$$

$$= \sum_{r_1<r_2<r_3}\left\{\sum_{r<\bar r}\langle r_1 r_2\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r\bar r r_3]} + \langle r_1 r_3\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r r_2 \bar r]} + \langle r_2 r_3\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r_1 r\bar r]}\right\} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}, \tag{52 a}$$

$$v^{[r_1 r_2 r_3]} = \sum_{r<\bar r}\langle r_1 r_2\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r\bar r r_3]} + \langle r_1 r_3\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r r_2 \bar r]} + \langle r_2 r_3\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r_1 r\bar r]}. \tag{52 b}$$

Plus généralement, pour un élément de $\overset{f}{\wedge} R$, on a

$$\mathbf{v}_f = \sum_{r_1<\ldots<r_f} v^{[r_1\ldots r_f]} a_{r_1}\ldots a_{r_f} = \mathbf{V}\,|\,\mathbf{c}_f = \sum_{\substack{r<\bar r\\ s<\bar s}}\langle r\bar r\,|\,V\,|\,s\bar s\rangle\, a_r a_{\bar r} a_{\bar s}^{*} a_s^{*}\,|\sum_{r_1<\ldots<r_f} c^{[r_1\ldots r_f]} a_{r_1}\ldots a_{r_f}$$

$$= \sum_{r_1<\ldots<r_f}\left\{\sum_{k''>k'=1}^{f}\sum_{r<\bar r}\langle r_{k'} r_{k''}\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r_1\ldots r_{k'-1} r r_{k'+1}\ldots r_{k''-1}\bar r r_{k''+1}\ldots r_f]}\right\} a_{r_1}\ldots a_{r_f}, \tag{53 a}$$

$$v^{[r_1\ldots r_f]} = \sum_{k''>k'=1}^{f}\sum_{r<\bar r}\langle r_{k'} r_{k''}\,|\,V\,|\,r\bar r\rangle\, c^{[r_1\ldots r_{k'-1} r r_{k'+1}\ldots r_{k''-1}\bar r r_{k''+1}\ldots r_f]}. \tag{53 b}$$

La correspondance $\mathbf{W} \sim \sum_k W_k$, $\mathbf{V} \sim \sum_{i>k} \mathbf{V}_{ik}$. — Les coefficients (43) d'un élément $\mathbf{c}_f$ de $\overset{f}{\wedge} R$ sont au facteur de normalisation $\frac{1}{\sqrt{f!}}$ près les coefficients de ce tenseur antisymétrique dans l'espace $R^f = R \times R \times \ldots \times R$ de tous les tenseurs de degré f de R. Les relations (46 b), (47 b), (48 b) montrent alors explicitement que dans le sous-espace $\overset{f}{\wedge} R$ de R^f l'opérateur $\mathbf{W}$ est identique à l'opérateur $\sum_k W_k$ de R^f, où W_k s'obtient par la composition de $(f-1)$-opérateurs unité et de l'opérateur W, dont les éléments de matrice sont $(r \mid W \mid s)$, du $k^{\text{ième}}$ espace vectoriel dans le produit tensoriel. Les équations (51 b), (52 b), (53 b) montrent explicitement que dans le sous-espace $\overset{f}{\wedge} R$ de R^f l'opérateur $\mathbf{V}$ est identique à l'opérateur $\sum_{i>k}^{f} V_{ik}$ de R^f, où V_{ik} s'obtient par la composition de $(f-2)$-opérateurs unité et de l'opérateur V, avec les éléments de matrice $(\overline{rr} \mid V \mid \overline{ss})$, agissant dans l'espace $R_i \times R_k$, produit du $i^{\text{ième}}$ et du $k^{\text{ième}}$ facteur R du produit tensoriel R^f.

On voit ainsi directement l'identité dans $\overset{f}{\wedge} R$ des opérateurs $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$ de la seconde quantification avec les opérateurs $\sum_{k=1}^{f} W_k$, $\sum_{i>k=1}^{f} V_{ik}$ de l'espace R^f de la Mécanique matricielle. L'équivalence des opérateurs (41), (42) de la seconde quantification et de la Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration s'en déduit en passant de la Mécanique ondulatoire à la Mécanique matricielle par l'intermédiaire d'un système orthonormal de fonctions d'onde et des éléments de matrice donnés par (41), (42).

Les opérateurs $\Psi(x)$, $\Psi^*(x)$. — A l'aide du système orthonormal complet $\psi_r(x)$, on peut former les opérateurs

$$\Psi(x) = \sum_r \psi_r(x) a_r^*, \qquad \Psi^*(x) = \sum_r \psi_r^*(x) a_r, \tag{54}$$

et écrire les opérateurs (41), (42) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{W} &= \int \Psi^*(x) W(x) \Psi(x)\,\mathrm{d}x, \\ \mathbf{V} &= \frac{1}{2} \int \Psi^*(x) \Psi^*(x') V(x, x') \Psi(x') \Psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Des relations d'anticommutation (11 a, b) des opérateurs a_r, a_r^* et de l'orthonormalité des fonctions $\psi_r(x)$ on déduit les relations

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x) \Psi^*(x') + \Psi^*(x') \Psi(x) &= \delta(x - x'), \\ \Psi(x) \Psi(x') + \Psi(x') \Psi(x) &= 0, \\ \Psi^*(x) \Psi^*(x') + \Psi^*(x') \Psi(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Dans la méthode de la seconde quantification, on peut partir d'une façon formelle de ces relations. Cependant le sens des opérateurs $\Psi(x)$, $\Psi^*(x)$ ne devient clair que dans l'espace $\wedge R$ des tenseurs antisymétriques représentant les états du système de particules, et il est plus naturel de les introduire *a postériori*. Cette remarque est valable à plus forte raison dans la théorie du positron, où le passage de la théorie d'une seule particule à la théorie du système de particules demande des modifications à cause des solutions d'énergie négative du problème de l'électron de Dirac.

Manuscrit reçu le 16 juillet 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Grassmann H. — Ausdehnungslehre, Berlin, 1862.

[2] Bourbaki N. — Algèbre multilinéaire, Paris, 1948.

[3] Jordan P. — *Z. Physik*, 1927, **44**, 473. — Jordan P. et Wigner E. — *Z. Physik*, 1928, **47**, 631.

[4] Fock V. — *Z. Physik*, 1932, **75**, 622.

SUR L'AMÉLIORATION DE LA PRÉCISION DES POINTÉS LONGITUDINAUX

Par Mlle B. DOSSIER et MM. P. JACQUINOT, A. MARÉCHAL et G. PIEUCHARD.

Une répartition non uniforme des amplitudes sur la pupille modifie non seulement les figures de diffractions, mais aussi la façon dont elles varient en dehors du plan de l'image. On peut, en particulier, chercher à obtenir la précision maximum du pointé axial d'une image optique en rendant aussi rapide que possible la variation d'une des grandeurs caractéristiques de l'image. Pour des raisons de simplicité de calcul nous avons choisi l'éclairement au centre de la tache de diffraction; on verra ultérieurement que, suivant les circonstances, l'œil peut se fier à d'autres critères, mais l'étude de la variation de l'éclairement central a cependant permis de trouver des dispositifs efficaces dans des circonstances correspondant ou non au calcul.

Le problème peut être traité pour un objet lumineux ponctuel, puis pour un objet linéaire (ligne fine lumineuse incohérente) : dans tous les cas, l'éclairement central E_0 est stationnaire au voisinage du plan image, et l'on caractérise ses variations à l'aide de sa dérivée seconde.

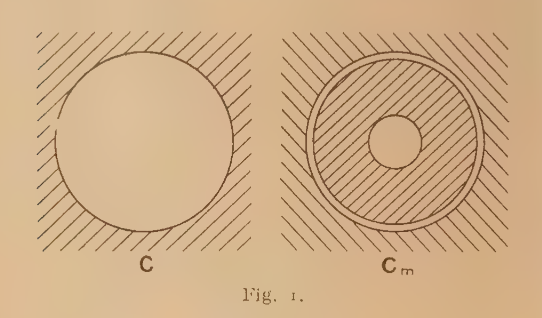


Fig. 1.

a. Cas de l'objet ponctuel. — En rapportant la pupille à des axes Px, Py, on est amené à rendre maximum la quantité

$$\frac{d^2 E_0}{dr^2} = -\frac{2\pi^2}{\lambda^2 p^4}\left[\int F(x,y)(x^2+y^2)^2\,ds \int F(x,y)\,ds \right. \\ \left. \left(\int F(x,y)(x^2+y^2)\,ds\right)^2\right].$$

où F est l'amplitude au point de coordonnées x, y. On trouve que si la pupille est limitée à un cercle de rayon R la valeur maximum de cette expression est obtenue lorsqu'on utilise une ouverture centrale et une ouverture annulaire marginale de surfaces égales et aussi petites que possible.

La figure 1 montre les pupilles à symétrie circulaire avec répartition uniforme (pupille C) et répartition en couronne centrée (pupille C_m). On trouve qu'à la limite, la dérivée seconde est trois fois plus grande pour C_m que pour C.

b. Cas de la ligne lumineuse éclairée en lumière incohérente. — L'éclairement au centre de l'image de la ligne est alors lié à la surface de section du solide de diffraction relatif à l'image d'un point, que l'on peut exprimer commodément à l'aide d'intégrales effectuées sur la pupille. On trouve que la variation maximum de cette surface de section est obtenue lorsque l'on répartit les amplitudes vibratoires uniquement sur trois petites surfaces dont l'une, située sur l'axe de symétrie, a une surface égale à s, les deux autres $\left(\text{de surface } \frac{s}{2}\right)$ en étant aussi éloignées que possible (*fig.* 2). On peut bien entendu réaliser une telle pupille à l'aide de trois fentes étroites parallèles et dont les largeurs sont respectivement $\frac{l}{2}$, l et $\frac{l}{2}$ (pupille de la figure 2, à droite).

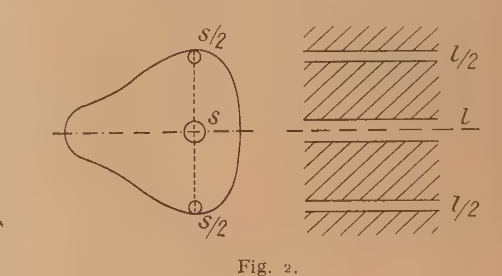


Fig. 2.

On retrouve ainsi le dispositif à trois fentes proposé par Zernike [1] pour la mesure des différences de marches. On peut, en effet, avec ce système, soit viser l'image elle-même, soit introduire sur la fente centrale une différence de marche de $\frac{\lambda}{4}$. On obtient dans les deux cas des franges d'interférence rappelant très peu l'image géométrique d'une ligne, mais dont les aspects varient rapidement avec le changement de mise au point; dans le second cas, en particulier, il y a des variations de rapports d'éclairement du premier ordre au lieu d'un phénomène stationnaire et la précision est bien meilleure, ainsi que l'a vérifié par ailleurs M. Duffieux.

On donnera dans une prochaine lettre les résultats des mesures visuelles et photoélectriques faites avec les différents procédés suggérés ici, ainsi qu'avec une ligne lumineuse observée avec les pupilles classiques C et L et avec la pupille à couronne centrée C_m, qui semble être la plus commode pour l'utilisation courante.

[1] F. ZERNICKE, *J. Opt. Soc. Amer.*, 1950, **40**, 326.

POLYMORPHISME DU COMPOSÉ DÉFINI MnBi AUX TEMPÉRATURES DE DISPARITION ET DE RÉAPPARITION DE L'AIMANTATION SPONTANÉE

Par M. Charles Guillaud.

Sommaire. — On a mis en évidence, à la température de 360° C qui correspond à la disparition de l'aimantation spontanée de l'alliage MnBi, une variation brusque du paramètre c qui passe de 6,11 Å à 5,83 Å. On envisage que cette anomalie est due au passage du ferromagnétisme à l'antiferromagnétisme.

Le composé défini MnBi est ferromagnétique; l'aimantation spontanée disparaît à 360° C au chauffage et ne réapparaît qu'à 340° C seulement au refroidissement. L'irréversibilité laisse supposer, non un vrai point de Curie, mais un point de transformation. Cette hypothèse est également étayée par les résultats de l'analyse thermique, qui met en évidence une chaleur latente qui n'est pas l'anomalie de seconde espèce caractérisant le point de Curie, et aussi par la chute brusque de l'aimantation spontanée.

Il est possible, par une trempe énergique au-dessus de 360° C, de conserver l'état du composé à cette température; on obtient alors un alliage non ferromagnétique. Afin de compléter les résultats relatifs à cette anomalie particulière, une étude aux rayons X, effectuée par R. Faivre, a alors été faite sur un alliage ferromagnétique, et sur ce même alliage, trempé à 400° C, non ferromagnétique.

En voici les résultats :

— A 20° C, le diagramme de l'état ferromagnétique révèle une symétrie hexagonale. La maille élémentaire a pour paramètres : $a = 4{,}30$ Å, $c = 6{,}11$ Å, $\frac{c}{a} = 1{,}42$, distance Mn-Mn $= 3{,}06$ Å. Ces résultats s'accordent avec ceux précédemment obtenus par Hocart [1].

— Dans l'état non ferromagnétique, les caractères essentiels de l'arrangement des atomes, et en particulier leur groupe de symétrie, ne sont pas modifiés. La maille élémentaire a alors pour paramètres : $a = 4{,}32$ Å, $c = 5{,}83$ Å, $\frac{c}{a} = 1{,}35$, distance Mn-Mn $= 2{,}91$ Å.

Il en résulte que, lorsqu'on passe de l'état ferromagnétique à l'état non ferromagnétique, a croît normalement compte tenu des différences de température, mais c décroît nettement. La transformation se traduit donc par une contraction suivant l'axe sénaire.

On peut rapprocher cette transformation particulière de celles observées sur le composé défini MnAs et sur la pyrrhotine [2, 3] qui cristallisent dans le même système hexagonal, type NiAs.

D'autre part, par chauffage, on fait réapparaître le ferromagnétisme dès la température de 160° C. En prolongeant ce chauffage pendant deux heures environ à cette température, on retrouve le moment propre de MnBi ferromagnétique, ainsi que les paramètres de la maille élémentaire correspondant à cet état.

Nous envisageons, en accord avec A. Meyer, que nous nous trouvons en présence d'un passage de l'état ferromagnétique à l'état antiferromagnétique. Les atomes de Mn, disposés suivant des chaînes linéaires et dans des plans parallèles, auraient leurs moments de spins disposés antiparallèlement; il s'établirait ensuite à la température de 445° C, pour laquelle nous avons décelé une anomalie de chaleur spécifique analogue à celle que l'on observe à 360° C, un état paramagnétique normal.

[1] Hocart R. et Guillaud Ch. — *C. R. Acad. Sc.*, 1939, **209**, 443.
[2] Guillaud Ch. et Wyart J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1944, **219**, 393.
[3] Michel A. — *Thèse*, Paris, 1937.

UNE TÊTE DE SPECTROMÈTRE DE MASSE PERMETTANT, EN PARTICULIER, L'UTILISATION DE PRESSIONS DE GAZ ÉLEVÉES DANS LA CHAMBRE D'IONISATION

Par G. Philbert,
avec la collaboration technique de R. Valentin.

Pour différentes études (celles de cinétique chimique par exemple) utilisant la technique de la spectrométrie de masse, il est nécessaire de pouvoir admettre des pressions relativement grandes (supérieures à 10^{-3} mm) dans la chambre d'ionisation et de disposer de vitesses de pompage élevées dans la partie du spectromètre placée directement à la suite de l'orifice par où sont évacués hors de la source d'ions les gaz ou vapeurs à analyser. D'autre part le type de source le mieux adapté dépend des recherches envisagées. La construction d'un spectromètre de masse d'un usage universel doit donc donner la possibilité de remplacer facilement la source et d'étudier divers systèmes optiques.

Une tête de spectromètre de masse répondant à ces conditions a été réalisée. Elle est entièrement métallique et constituée essentiellement par un tube cylindrique de bronze adaptable par l'une de ses extrémités à l'analyseur du spectromètre de masse, par l'autre à un appareil quelconque d'introduction de gaz. La source ionique (chambre d'ionisation et plaques accélératrices) s'introduit et se verrouille à l'intérieur d'un bâti jouant le rôle de socle. Dans un certain nombre de cas, il est nécessaire de guider les électrons qui ionisent le gaz à l'aide d'un champ magnétique. Il a paru avantageux de placer les pôles (démontables) de l'électro-aimant à l'intérieur de l'enceinte vidée, la culasse et les bobines étant situées à l'extérieur. Cette disposition permet de réduire l'entrefer aux dimensions minima compatibles avec les dimensions de la source, donc de diminuer l'influence perturbatrice du champ de fuite. Elle donne également la possibilité d'adapter exactement la forme des pièces polaires à la source utilisée.

La tête du spectromètre de masse est séparée du tube analyseur par un diaphragme qui peut jouer différents rôles dans l'optique ionique de l'instrument. Sa largeur et sa position sont réglables sous vide.

Il est donc loisible de rendre dans une large mesure le vide dans l'analyseur qui possède son système de pompage propre, indépendant de la pression résiduelle existant dans la tête. Le parcours des ions dans cette partie du spectromètre représente une fraction seulement de leur parcours total; il est possible d'y admettre une pression relativement plus élevée (quelques 10^{-5} mm) sans que des phénomènes gênants se produisent. L'evacuation se fait par une pompe à diffusion d'huile et le débit est de l'ordre de 20 litres par seconde. Malgré la complexité inévitable de la construction mécanique de l'appareil et le grand nombre de joints de caoutchouc, la remontée de gaz permanents ne dépasse pas 10^{-3} mm par heure. L'analyse spectrométrique des gaz résiduels a montré qu'il s'agit essentiellement de l'eau de désorption et des produits de dissociation de l'huile utilisée dans les pompes.

Cette tête de spectromètre de masse a permis l'introduction dans la chambre d'ionisation de gaz sous des pressions de 10^{-2} mm de mercure; la pression mesurée alors dans l'enceinte à l'aide d'une jauge d'ionisation Philips et d'un manomètre Knudsen [1] ne dépassait pas 3.10^{-5} mm. Les spectres de masse ont été repérés et les premières mesures sur les intensités recueillies ont confirmé l'évaluation des pressions dans la chambre d'ionisation. La possibilité de varier, soit par simple démontage de la source, soit dans l'enceinte vidée elle-même, les ouvertures des fentes objet et diaphragme a également donné celle d'étudier l'optique ionique de la source actuellement utilisée. L'ensemble des résultats expérimentaux fera l'objet de publications détaillées.

[1] L'installation du manomètre Knudsen et les mesures de vide sont dues à MM. Duval et Le Goff.

AMPLIFICATION LOGARITHMIQUE DES COURANTS FAIBLES A L'AIDE DE DIODES

Par M. Brière, A. Rogozinski et J. Weill

Commissariat à l'Énergie Atomique
Fort de Châtillon, Fontenay-aux-Roses.

Le courant thermo-ionique I et la tension anodique V d'une diode sont liés, *pour des valeurs négatives de cette tension*, par une loi logarithmique de la forme $V - V_0 = K \text{ Log } I$, où V_0 et K sont des constantes qui dépendent de la température de la cathode et de la nature des électrodes (1).

Cette relation a été utilisée par plusieurs auteurs (2) comme base d'une méthode de mesure de courants susceptibles de varier dans de très larges limites. Nous avons repris ce problème, en nous attachant surtout à étendre, vers les courants très faibles, le domaine d'utilisation de la méthode.

En fait, la loi en question cesse d'être valable lorsque V s'approche d'une tension d'équilibre V_e, pour laquelle le courant qui traverse la diode s'annule. L'existence de ce point est due à un ensemble de facteurs parasites, parmi lesquels nous ne citerons que l'isolement imparfait de l'anode par rapport à la cathode, ce qui a pour effet de créer un courant de fuite entre ces électrodes et la présence à l'intérieur de la diode de gaz résiduels dans lesquels les électrons émis par la cathode libèrent des ions positifs (courant inverse) qui se dirigent également vers l'anode.

La valeur de V_e varie, suivant les diodes, entre $-1{,}5$ et $-2{,}5$ volts environ. La lampe dont on se servira devra présenter un courant de fuite et un courant inverse d'autant plus faibles que le courant à mesurer est lui-même plus faible.

Dans la région logarithmique de la caractéristique, la résistance interne ρ de la lampe est variable et peut atteindre des valeurs très élevées. Aussi la résistance interne de la source du courant à mesurer devra-t-elle être grande par rapport à ρ. Une chambre d'ionisation et une cellule photoélectrique constituent d'excellents exemples de telles sources. Notons, enfin, que l'appareil destiné à mesurer la tension V devra présenter lui-même une résistance interne pratiquement infinie. On fera donc appel, dans ce but, soit à un électromètre électrostatique, soit à un amplificateur comportant, à l'entrée, une lampe électromètre.

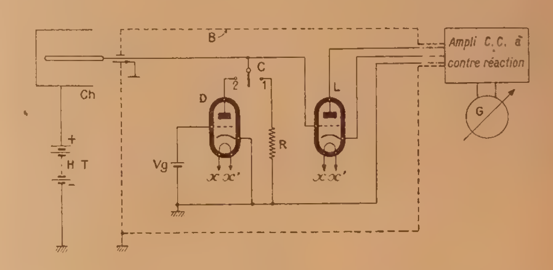


Fig. 1. — Dispositif expérimental.

La source de courant Ch est une chambre d'ionisation ou une cellule photoélectrique irradiée, par un rayonnement approprié d'intensité variable.

La partie essentielle du montage est constituée par un préamplificateur comprenant une diode D et une lampe électromètre L, le tout entouré d'un blindage B.

Un commutateur C à grand isolement permet de faire passer le courant fourni par Ch, soit dans la diode D, soit dans la résistance R, qui peut varier dans de larges limites.

Le galvanomètre G permet de mesurer la tension aux bornes de D et de R.

Les mesures de chute de tension effectuées sur D et sur R permettent de déterminer V et I, d'où l'on déduit les courbes $V = f(I)$ représentées sur la figure 3.

Dispositif expérimental. — Le dispositif expérimental que nous avons employé pour étudier le comportement d'une diode dans un montage logarithmique est représenté par la figure 1. Il comprend, essentiel-

(1) O. W. Richardson, *Phil. Mag.* G. B. 1912, **23**, 263; *Phil. Mag.* G. B. 1912, **24**, 737; The Emission of Electricity from Hot Bodies, Longmans, Green et Co, 1921; S. Dushman, *Phys. Rev.*, U. S. A. 1914, **4**, 121.

(2) Meagher et Bentley, *Rev. Sc. Instrum.* U. S. A. 1939; 336-339; C. W. Johnstone, rapport déclassifié U. S. A., 1949, A. E. C. U., 363.

lement, la diode, une chambre d'ionisation fournissant le courant I, un amplificateur à courant continu et un commutateur C à grand isolement, permettant de mettre dans le circuit de la chambre d'ionisation soit une résistance R (position 1), soit la diode (position 2). La chambre d'ionisation est irradiée par un rayonnement X, ou gamma, dont l'intensité peut varier dans de larges limites.

Les résultats les plus satisfaisants, à la fois quant à la limite inférieure et quant à l'étendue des courants que le dispositif permettait de mesurer, ont été obtenus avec des lampes électromètres que l'on a fait fonctionner en diode (*fig.* 2). Nous avons utilisé, en particulier, la lampe 954 et la lampe Victoreen VX 41.

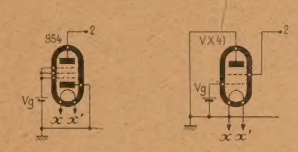


Fig. 2. — Détail des connexions en diode des lampes 954 et VX 41.

Dans le cas de la 954, la plaque de la lampe joue le rôle, d'anode en connexion diode, alors que pour la VX 41 la plaque est mise à la masse et la grille, qui joue normalement le rôle de grille de commande en montage tétrode, sert d'anode en connexion diode.

L'expérience nous a montré que l'étendue logarithmique des caractéristiques des diodes ainsi réalisées devenait sensiblement meilleure, lorsqu'on portait les grilles de ces lampes à un potentiel légèrement positif par rapport à la cathode. D'autre part, le courant de chauffage du filament a été réduit par rapport à celui indiqué par le constructeur.

On constate que la valeur V_0 peut varier d'une lampe à l'autre et cela même pour des lampes du même type. La cause déterminante du phénomène observé est due probablement à de légères variations dans la nature des électrodes, se traduisant, en particulier, par des variations du potentiel d'extraction qui les caractérise.

Les courbes A, B et C de la figure 3, où A et B correspondent à une même lampe 954 et où C correspond à une autre lampe du même type, illustrent bien le cas considéré.

Les mesures ont été effectuées de la manière suivante :

Le commutateur C étant placé en position 1, on détermine d'abord, pour chaque intensité d'irradiation de la chambre, la valeur du courant $I = \frac{V_R}{R}$ qui la traverse, en faisant débiter celui-ci dans la résistance R et en mesurant à l'aide de l'amplificateur la chute de tension V_R qu'il y provoque. On fait passer ensuite C sur la position 2, et l'on détermine, à l'aide du même amplificateur, la tension V qui apparaît aux bornes de la diode traversée par le courant déjà connu I.

Résultats. — En portant V en fonction de $\log I$, on trouve, pour chaque type de lampe et pour différentes valeurs du courant de chauffage de son filament, des courbes dont la partie rectiligne correspond à des courants I pouvant varier dans un rapport de 1 à 10^5, mais dont la limite inférieure dépend du type de la diode utilisée (*fig.* 3).

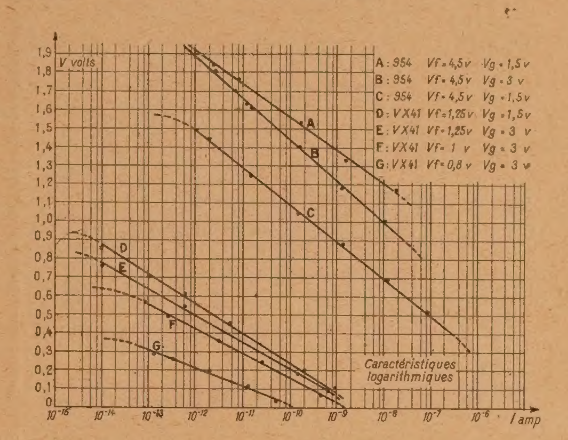


Fig. 3. — Caractéristiques logarithmiques de diodes.

On a représenté en ordonnées la tension V aux bornes de la diode et en abscisses le courant I qui la traverse.

La partie linéaire des caractéristiques relatives aux deux types de lampes 954 et VX 41 que l'on a fait fonctionner en diode est valable pour des courants dont les valeurs varient dans un rapport de 1 à 10^5. On remarquera que la partie linéaire des caractéristiques correspondant à la lampe électromètre VX 41 s'étend, du côté des faibles courants, jusqu'à 10^{-14} A. Les pentes des portions linéaires des caractéristiques dépendent peu des conditions de fonctionnement des lampes. Par contre, les caractéristiques subissent généralement une translation, quand on passe d'une lampe à une autre, même pour des lampes du même type; c'est le cas des courbes A et C correspondant chacune à une lampe 945 différente, mais fonctionnant dans des conditions identiques.

Cette limite est de l'ordre de 10^{-14} A pour la VX 41 et seulement de 10^{-12} pour la 954. La pente varie peu d'une lampe à l'autre. Elle est égale à environ 0,2 volts pour une variation du courant d'une puissance de 10.

Applications. — Le montage décrit et les caractéristiques obtenues pourront trouver de nombreuses applications notamment dans le domaine des courants faibles. Citons la possibilité de lire sur une échelle d'un cadran, et sans effectuer de changement de sensibilité de l'appareil, le résultat des mesures d'une grandeur pouvant varier dans un rapport considérable (de 1 à 10^5). A cet égard, la méthode se prête particulièrement bien à la mesure de flux lumineux, à l'aide d'une cellule photoélectrique et à la mesure, à l'aide de chambres d'ionisation, des intensités des rayonnements émis par des tubes à rayons X, par des substances radioactives et par des piles atomiques. Les disposit ifs à réponse logarithmique présentent également un grand avantage dans les appareils portatifs, destinés à la protection du personnel contre les radiations et à la prospection des minerais radioactifs.

Une autre application de la méthode est la mesure

du rapport de deux grandeurs, donné directement par la différence de lectures correspondantes. On a, en effet

$$V_1 - V_2 = \mathrm{Log}\, I_1 - \mathrm{Log}\, I_2 = \mathrm{Log}\, \frac{I_1}{I_2}.$$

Ajoutons, enfin, à ces applications la possibilité de mesurer la dérivée logarithmique par rapport au temps t d'un courant variable $I(t)$, auquel correspond à la sortie de l'amplificateur la tension $V(t) = K\,\mathrm{Log}\,I(t)$. On placera à la sortie de l'amplificateur en série une capacité et un galvanomètre, lequel accusera une déviation proportionnelle à $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$, soit à $\frac{1}{I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$.

On pourra utiliser ce procédé pour la mesure des exposants d'une fonction exponentielle. Nous citerons principalement le cas des piles atomiques, où la puissance est une fonction du temps de la forme $I = I_0 e^{kt}$ et celui des radioéléments dont la radioactivité suit une loi analogue. Le facteur k, dérivée logarithmique de I représente la « période » de la pile ou du radioélément. Le dispositif décrit permet la mesure directe de cette période.

PERFECTIONNEMENT AUX COMPTEURS DE GEIGER-MÜLLER CONTENANT DU CO_2

Par J. Labeyrie,
Commissariat à l'Énergie Atomique,
Laboratoires du Fort de Châtillon, *Fontenay-aux-Roses*.

Sommaire. — On décrit un procédé de détection et de dosage commode du carbone radioactif en phase gazeuse (CO_2) dans un compteur de Geiger-Müller. En ajoutant au CO_2 une faible quantité d'alcool (1 cm Hg) et en utilisant un temps de restitution du potentiel d'anode de 2.10^{-4} s environ, on obtient des paliers supérieurs à 200 V, même à des taux de comptage de 15 000 impulsions par minute; la stabilité et la fidélité de ces paliers sont bonnes.

1. Introduction. — Les techniques utilisant le carbone 14 comme isotope marqué ont une grande importance, particulièrement dans les sciences biologiques.

Il est cependant assez difficile, en général, d'effectuer des mesures sur les échantillons contenant le carbone 14, car l'énergie du rayonnement β émis est l'une des plus faibles que l'on connaisse (E_{max} : 155 keV) [9], [10], [11]. Pour détecter ce rayonnement il faut utiliser des compteurs de Geiger à paroi très mince, ou, mieux encore, des compteurs spéciaux dans lesquels on introduit l'échantillon radioactif en phase gazeuse. En outre, la très longue période du carbone 14 (5 000 ans environ) [3], se traduit par une très faible activité spécifique des échantillons contenant cet isotope. Là encore, l'introduction du composé carboné à l'intérieur même du compteur présente un gros avantage, puisqu'elle permet d'avoir un angle solide de comptage aussi grand que possible.

2. Compteurs contenant du CO_2. — Plusieurs auteurs [2] à [6] ont étudié le fonctionnement des compteurs Geiger dans lesquels on introduit divers mélanges contenant du CO_2, qui est le composé

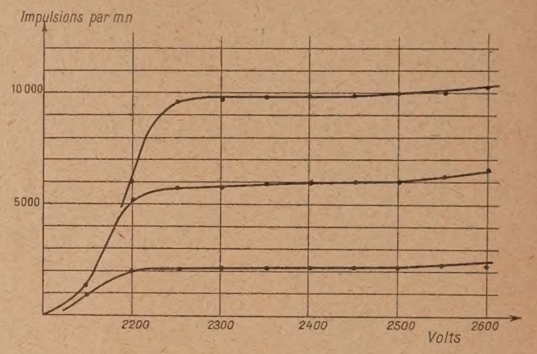


Fig. 1.

Paliers à divers taux de comptage d'un compteur rempli du mélange CO_2-alcool.

La constante de temps de restitution du potentiel sur l'anode est de 5.10^{-4} s.

Les pressions partielles de CO_2 et d'alcool sont respectivement 10 cm Hg et 1 cm Hg.

gazeux du carbone le plus facile à obtenir. Ces études ont porté sur des mélanges, car les compteurs remplis avec du CO_2 pur n'ont pratiquement pas de palier,

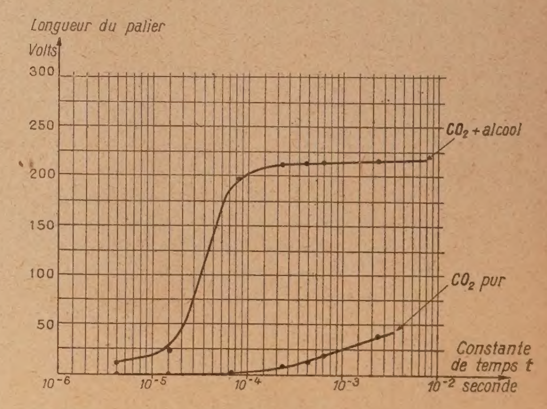


Fig. 2.

Influence de la constante de temps de restitution du potentiel sur le palier du compteur.

Les pressions partielles du mélange CO_2-alcool sont respectivement 10 cm Hg et 1 cm Hg.

La longueur du palier est mesurée par la différence de potentiel séparant deux points du plateau entre lesquels l'augmentation du taux de comptage est de 4 pour 100.

Les mesures ont été faites à un taux d'environ 5 000 impulsions par minute.

Les constantes de temps τ ont été déterminées au moyen d'un préamplificateur, à temps mort variable, appliquant sur l'anode du compteur une impulsion négative de 160 V, dont la durée, à la moitié de sa hauteur, est τ.

même si l'on éteint artificiellement leurs impulsions au moyen des dispositifs électroniques habituels (*fig.* 2).

Deux procédés ont été ainsi reconnus efficaces :

1° *Incorporation du CO_2 au mélange argon-alcool usuel.* — Dans ce cas, la proportion de CO_2 ne doit pas dépasser 7 à 8 pour 100, sous peine d'avoir un compteur inutilisable.

2° *Remplissage du compteur par le mélange* $CO_2 + CS_2$ [4], [5]. — On obtient ainsi de bonnes caractéristiques, les pressions partielles étant de 10 à 50 cm Hg pour le CO_2 et de 2 cm Hg pour le CS_2.

Ce deuxième procédé permet d'avoir une sensibilité de détection et une précision de mesure meilleures que le premier, puisque la quantité de CO_2 contenue dans le compteur est beaucoup plus grande.

Par contre, le mélange $CO_2 + CS_2$ n'est pas auto-extincteur ce qui oblige à adjoindre au compteur un montage électronique genre Neher [7], [8], [2], compliquant ainsi quelque peu les mesures. De plus, le CS_2 est une substance désagréable à manipuler.

3. **Compteurs contenant le mélange CO_2-alcool.** — Pour pallier à ces inconvénients, nous avons étudié un procédé permettant d'introduire de fortes quantités de CO_2 dans un compteur, tout en conservant à ce compteur de bonnes caractéristiques (auto-extinction, palier) et une manipulation facile.

On obtient ce résultat en remplissant le compteur avec un mélange de CO_2 et d'alcool éthylique. La pression optima d'alcool est de l'ordre de 1 cm Hg, la pression de CO_2 peut varier de 2 à 50 cm Hg environ.

La présence d'alcool empêche les ions CO_2^+, produits lors de chaque impulsion, au voisinage de l'anode du compteur, d'arriver à la cathode. On supprime ainsi la cause principale des mauvaises caractéristiques des compteurs remplis avec du CO_2.

La vapeur d'alcool a été choisie expérimentalement parmi un certain nombre de vapeurs organiques (acétone, éther-oxyde, formiate d'éthyle, alcool éthylique) comme étant celle qui donne le mieux au compteur les propriétés suivantes :

1° Palier long et à faible pente;

2° Auto-extinction.

3° Stabilité du palier jusqu'à des taux de comptage élevés;

4° Stabilité du comptage dans le temps;

5° Temps de résolution faible;

6° Commodité de remplissage.

La valeur de la pression partielle d'alcool a été choisie de la même façon. Sur les figures 1 et 2 on peut constater que les cinq premières conditions sont satisfaites.

Temps de résolution. — Malgré la présence de la vapeur d'alcool, des ions positifs de CO_2 arrivent en nombre suffisamment grand sur la cathode pour donner naissance à quelques décharges multiples.

L'étude de ces décharges avec un préamplificateur à temps mort variable montre qu'on élimine complètement leurs effets pour un compteur type (10 cm Hg de CO_2, 1 cm Hg d'alcool, cathode en carbone de 20 mm de diamètre) en employant une constante de temps de restitution supérieure à 2.10^{-4} s (*fig.* 2).

Le temps de résolution, dans ce cas, a pratiquement la même valeur que la constante de temps. Il est tout à fait suffisant pour les mesures habituelles, puisqu'il n'entraîne qu'une erreur relative de 3 pour 100 environ pour des taux de comptage de 10 000 impulsions par minute.

Cette constante de temps de 2.10^{-4} s est obtenue simplement en alimentant l'anode du compteur, dont la capacité est de l'ordre de 5.10^{-12} F, à travers une résistance de 50 MΩ.

Seuil en fonction de la pression. — La variation du seuil du palier, en fonction de la pression, est à peu près linéaire entre 5 et 80 cm Hg de pression de CO_2, la pression d'alcool étant toujours de 1 cmHg (*fig.* 3). Cette variation est semblable à celle obtenue par Brown et Miller [5] avec le mélange $CO_2 + CS_2$.

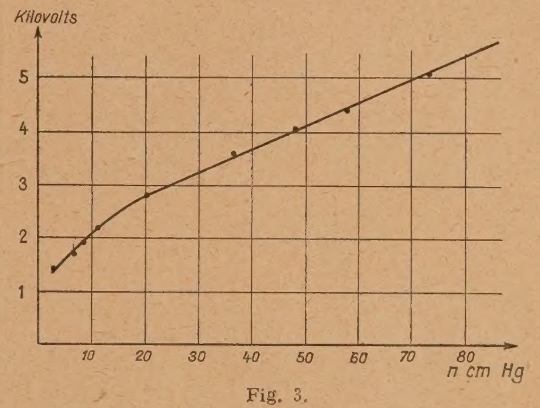


Fig. 3.

Variation de la tension seuil du compteur rempli du mélange n cm Hg CO_2 + 1 cm Hg-alcool, en fonction de n.

La variation est à peu près linéaire en fonction de la pression à partir de 15 cm Hg.

Le seuil est la tension à partir de laquelle les impulsions ont même amplitude.

Construction des compteurs. — Le volume sensible est d'environ 50 cm³. La cathode est en aquadag, peint directement sur la face interne de l'enveloppe en verre et séché ensuite à 200° C. La précaution que prennent certains auteurs de déposer une couche d'argent entre le verre et l'aquadag est, à notre avis, inutile.

La technique de remplissage avec l'alcool est analogue à celle utilisée pour le CS_2 [1], [2].

MM. Léger et Senaux se sont chargés de l'étude préliminaire sur le mélange $CO_2 + CS_2$, avec extinction extérieure. M. Léger a également effectué de nombreuses mesures avec les différentes vapeurs.

[1] Calvin M., Heidelberger C., Reid J. C., Tolbert B., Yankwich P. — Isotopic Carbon (John Wiley and Sons, New-York, 1949).

[2] Brownell G. L., Lockhart H. S. — CO_2 Counter Techniques for C^{14} Measurement. *Technical report*, 1949, n° **30**; *Mass. Inst. of Technology Lab. for nuclear Sci. and Engng.*

[3] ENGELKEMEIR A. G., HAMILL W. H., INGHRAM M. G., et LIBBY W. F. — The Half-Life of Radio Carbon C^{14}. *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1825.
[4] MILLER W. W. — *Science*, 1947, **105**, 2718.
[5] BROWN S. C., MILLER W. W. — Carbon Dioxide Filled Geiger-Müller Counters. *Rev. of Scient. Inst.*, 1947, **18**, 496.
[6] EIDINOFF M. L. — Internal Gas Counting of Radioactive Carbon and Hydrogen. *A.I.E.E.*, *I.R.E.*, Conference, publiée par l'American Institute of Electrical Engineers en mars 1950, 65-68.
[7] NEHER H. V., HARPER W. W. — *Phys. Rev.*, 1936, **49**, 940.
[8] NEHER H. V., PICKERING W. H. — *Phys. Rev.*, 1938, **53**, 316.
[9] SOLOMON A. K., GOULD R. G., ANFINSEN C. B. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 1097.
[10] COOK C. S., LANGER L. M. et PRICE H. C. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 548.
[11] ANGUS J., COCKROFT A. L., CURRAN S. C. — *Phil. Mag.* 1949, **40**, 523.

ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA FORME NOUVELLE DE LA THÉORIE DU MÉSON

Par BERNARD KWAL,
Institut Henri Poincaré.

Nous venons de montrer [1] qu'une réinterprétation judicieuse de la notion des champs et des potentiels du corpuscule maxwellien de spin 1 permet de présenter d'une manière nouvelle la théorie de ce corpuscule, qui semble se conformer davantage au schéma classique de Maxwell-Lorentz, que la théorie actuellement en vogue. Contrairement à cette dernière, la nouvelle formulation ne paraît pas se heurter à la difficulté bien connue, liée à l'apparition des singularités en r^{-3} dans l'expression de l'énergie d'interaction.

Nous allons écrire des équations de la théorie nouvelle pour les quatre espèces de mésons, envisagés par Kemmer, mais en abandonnant sa nomenclature, où se reflète une conception des potentiels, qui, à la lumière de notre théorie, s'avère comme étant incompatible avec la signification physique de l'idée des potentiels.

Voici, pour commencer, les équations des *champs* du corpuscule maxwellien C_1^1 de L. de Broglie, en présence des sources

$$\left.\begin{aligned} \partial^j h_{jk} - \varkappa a_k &= g_1 C_k, \\ \partial_j a_k - \partial_k a_j - \varkappa h_{jk} &= g_2 M_{jk}. \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

Les *champs* a_k et h_{jk} dérivent des *potentiels* P_k et P_{jk}, grâce aux relations que voici :

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \varkappa P_k + \partial^j P_{jk}, \\ h_{jk} &= \varkappa P_{jk} + \partial_j P_k - \partial_k P_j + \frac{1}{\varkappa}\partial^l(\partial_{[j} P_{kl]}) \\ \partial^k P_k &= 0, \\ \partial_{[j} P_{kl]} &= -\frac{g^2}{\varkappa^2}\partial_{[j} M_{kl]}. \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

Ces potentiels « vrais » satisfont aux équations

$$(\Box - \varkappa^2) P_k = g_1 C_k, \qquad (\Box - \varkappa^2) P_{jk} = g_2 M_{jk}. \quad (1.3)$$

Ce sont, évidemment, les grandeurs P_k et P_{jk}, qui doivent jouer le rôle des variables canoniques indépendantes dans l'expression suivante de la fonction de Lagrange

$$\begin{aligned} L_1^1 = {} & a^{\star j} a_j + \frac{1}{2} h^{\star jk} h_{jk} \\ & - \left[g_1^\star C^{\star j} P_j + \left(g_{\frac{2}{2}}^\star\right) M^{\star jk} P_{jk} + \text{conj.}\right]. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant écrire la même suite d'équations, dans le cas des corpuscules, maxwellien dual C_1^1, non-maxwellien C_0^1 et non-maxwellien dual C'^1_0.

$$\left.\begin{aligned} \partial_{[j} h'_{kl]} - \varkappa b'_{[jkl]} &= g'_1 C'_{[jkl]}, \\ \partial^l b'_{[ljk]} - \varkappa h'_{[jk]} &= g'_2 M'_{[jk]}; \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

$$\left.\begin{aligned} b'_{[jkl]} &= \varkappa P'_{[jkl]} + \partial_{[l} P'_{jk]} + \frac{1}{\varkappa}\partial^m \partial_{[m} P_{jkl]}, \\ h'_{jk} &= \varkappa P'_{jk} + \partial^l P'_{[ljk]} + \frac{1}{\varkappa}\partial^m \partial_{[m} P'_{jk]}, \\ \partial_{[m} P'_{jk]} &= -\frac{g'_1}{\varkappa^2}\partial_{[m} S'_{jk]}, \\ \partial_{[m} P'_{jkl]} &= -\frac{g'_2}{\varkappa^2}\partial_{[m} S'_{jkl]} \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

$$\left.\begin{aligned} (\Box - \varkappa^2) P'_{[jkl]} &= g'_1 C'_{[jkl]}, \\ (\Box - \varkappa^2) P'_{jk} &= g'_2 M'_{jk}; \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} L'^1_1 = {} & \frac{1}{2} h'^{\star jk} h'_{jk} + \frac{1}{6} b'^{\star jkl} b'_{jkl} \\ & - \left[\left(g'^\star_{\frac{1}{6}}\right) C'^{\star jkl} P'_{jkl} + \left(g'^\star_{\frac{2}{2}}\right) M'^{\star jk} P'_{jk} + \text{conj.}\right]; \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial^m b_{[jklm]} - \varkappa b_{[jkl]} &= f_1 C_{[jkl]}, \\ \partial_{[m} b_{jkl]} \varkappa b_{[jklm]} &= f_2 C_{[jklm]}; \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

$$\left.\begin{aligned} b_{[jkl]} &= \varkappa P_{[jkl]} + \partial^m P_{[jklm]} + \frac{1}{\varkappa}\partial^m \partial_{[m} P_{jkl]}, \\ b_{[jklm]} &= \varkappa P_{[jklm]} + \partial_{[m} P_{jkl]}; \\ \partial^l P_{[jkl]} &= -\frac{f_1}{\varkappa_2} C_{[jkl]}. \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

$$\left.\begin{aligned} (\Box - \varkappa^2) P_{[jkl]} &= f_1 C_{[jkl]}, \\ (\Box - \varkappa^2) P_{[jklm]} &= f_2 C_{[jklm]}; \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_0^1 = {} & \frac{1}{6} b^{\star jkl} b_{jkl} + \frac{1}{24} b^{\star jklm} b_{jklm} \\ & - \left[\left(\frac{f_1}{6}\right) C^{\star jkl} P_{jkl} \right. \\ & \left. + \left(\frac{f_2}{24}\right) C^{\star jklm} P_{jklm} + \text{conj.}\right]; \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\partial_m b' - \varkappa b'_m = f'_1 C'_m, \qquad \partial^m b'_m - \varkappa b' = f'_2 C'; \quad (4.1)$$

$$\left.\begin{aligned} b'_m &= \varkappa P'_m + \partial_m P' \\ & \quad + \frac{1}{\varkappa}\partial^j(\partial_j P'_k - \partial_k P'_j), \\ b' &= \varkappa P' + \partial^m P'_m; \\ \partial_m P'_k - \partial_k P'_m &= -\frac{f'_1}{\varkappa^2}(\partial_m C'_k - \partial_k C'_m). \end{aligned}\right\} \quad (4.2)$$

$$(\Box - \varkappa^2) P'_m = f'_1 C'_m, \qquad (\Box - \varkappa^2) P' = f'_2 C'; \quad (4.3)$$

$$L'^1_0 = b'^{\star m} b'_m + b'^\star b' - [f'_1 C'^{\star m} P'_m + f'_2 C'^\star P']; \quad (4.4)$$

[1] *C. R. Acad. Sci.*, 1951, **232**, et aussi, *J. de Physique*, 1949, **8**, 191.

Le Gérant : MAURICE BLONDIN. 138061 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1951.